UE MEMS
Cours 1 : bases théoriques des MEMS.
Bases de la mécanique, transduction capacitive, résonateur mécanique à paramètres localisés

Dimitri Galayko

1 Introduction : domaine des MEMS (transparents)

–Plan de l'UE
– Définition du mot MEMS
– Applications et quelques raisons du succès de cette famille de composants

2 Rappel des éléments de la méchanique

Ce paragraphe rappelle des notions élémentaires de la mécanique. Il s'agit d'une tâche compliquée, car il s'agit de notions fondamentales ne pouvant pas se définir à travers des notions plus élémentaires encore.

2.1 Energie

L'énergie est la mesure de quantité de la matière (cf. la formule $W = mc^2$). En mécanique, il y a deux type d'énergie : l'énergie potentielle et l'énergie cinétique.

L'énergie cinétique est liée au mouvement. Chaque corps de masse m se déplaçant à vitesse $\vec{v}$ possède l'énergie cinétique suivante :

$$W_{cynetique} = \frac{mv^2}{2} \tag{1}$$

Notez que la vitesse et donc l'énergie cinétique dépendent du repère.

L'énergie potentielle est l'énergie liée à l'interaction entre les corps. Physiquement, l'énergie potentielle est celle du *champ* d'interaction. L'énergie du champ est une mesure de sa quantité (le champ est une forme de la matière...).

L'énergie potentielle dépend de la distance relative entre les corps en interaction, ainsi,

$$W_{potentielle} = f(\vec{x}_1, \vec{x}_2), \tag{2}$$

où $f(\cdot)$ est une fonction quelconque, $\vec{x}_i$ sont les coordonnées des objets. Très souvent, lorsque l'on s'intéresse à l'un des objets, on associe l'aure avec le repère (i.e., on fixe x_2 ou x_1), de sorte à ce que l'énergie potentielle de l'interaction dépend de la seule position de l'objet que l'on considère :

$$W_{potentielle} = f(\vec{x}). \tag{3}$$

Dans ce contexte et d'une manière abusive, on parle d'une "énergie potentielle *de l'objet (ou du corps)*. En réalité, l'énergie potentielle est toujours celle de l'interaction entre deux objets. Par exemple, on parle de l'énergie potentielle d'un corps se trouvant dans le champ gravitationnel de la Terre ; en réalité, on considère que la Terre est associée au repère, et donc l'énergie de l'interaction entre l'objet et la Terre ne dépend que de la coordonnée de l'objet.

Notez que la vitesse est une dérivée de la coordonnée, ainsi, l'énergie potentielle dépend de la coordonnée et l'énergie cinétique dépend de la dérivée de la coordonnée.

Une interaction entre objets mécaniques a la propriété fondamentale suivante. Soit deux objets en interaction ; si les objets ne participent à aucune autre interaction, l'interaction existante tend à modifier leurs positions de sorte à réduire l'énergie potentielle de l'interaction (par exemple, en leurs mettant en mouvement). Cette réduction de l'énergie potentielle s'accompagne par une augmentation égale de l'énergie cinétique. Ainsi, l'interaction entre un corps en chute libre et la Terre fait modifier les positions relatives de la Terre et de du corps, et augmente leurs vitesses en modifiant l'énergie cinétique [1].

1. Il n'y a pas d'erreur dans cette phrase : un corps en chute libre modifie également la vitesse de la Terre, en vertu de la loi de conservation d'impulsion. Cependant, cette modification est généralement indétectable.

2.2 Force mécanique

Nous avons dit que l'interaction entre deux corps tend à modifier les positions de ces corps. Cette action d'un champ potentiel (champ d'interaction) est connu comme "force". La force est définie de la manière suivante : c'est un vecteur dont la direction correspond à celle où la l'énergie potentielle d'intéraction décroît le plus vite, et dont le module est égale au module du gradient de l'énergie potentielle dans cette direction. Ainsi, la force mécanique est définie comme moins le *gradient* de l'énergie d'interaction [2]. Pour un cas unidimensionnel, et pour deux objets en unique interaction entre eux, elle se mesure de la manière suivante :

– Un des objet (avec coordonnée x_1) est déplacé de position dx.

– On mesure la nouvelle énergie potentielle $f(x_1 + dx, x_2)$,

– On ramène la variation de l'énergie potentielle sur dx :

$$F = -\frac{f(x_1 + dx, x_2) - f(x_1, x_2)}{dx} \tag{4}$$

La force est une grandeur vectorielle, elle se dirige toujours vers la direction dans laquelle la diminution de l'énergie potentielle est la plus grande.

Cette définition de la force est fondamentale ; pour un système complexe, contenant plusieurs interactions, elle est également valable si on prend en compte une variation de l'énergie potentielle globale qui est provoquée par un déplacement dx d'un des corps du système.

Bien que la force puisse d'une manière unique être déduite de l'énergie potentielle et donc cette grandeur est en quelque sorte redondante, elle est bien plus commode que l'énergie potentielle. En effet, une force se mesure très facilement, par exemple, à l'aide d'un ressort ou d'une balance. C'est donc une grandeur très largement utilisée en mécanique. Cependant, l'énergie potentielle est une caractéristique fondamentale d'un système mécanique, et on l'utilisera surtout pour analyser les systèmes complexes et multidomaines.

2. Le gradient d'un champ scalaire $W(\vec{x})$ est définie ainsi : $\mathrm{grad} W = \vec{i}\frac{\partial W}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial W}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial W}{\partial z}$ pour un espace tridimentionnel

2.3 Travail d'une force

Si un corps participe en une interaction en subissant une force $\vec{F}$ constante, et que ce corps se déplace dans l'espace sur la ligne droite donnée par le vecteur de déplacement $\vec{S}$, on dit que la force effectue un travail A :

$$A = \vec{F}\vec{S} \tag{5}$$

(il s'agit ici d'un produit scalaire).

Le travail a la même dimension que l'énergie. Si la force varie durant le déplacement et/si le déplacement ne s'effectue pas sur une ligne droite, on considère des déplacements infinitesimaux :

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\mathrm{d}\vec{S} \tag{6}$$

et ensuite, on intègre la forte à travers tout le trajectoire :

$$A = \int_S \vec{F}\mathrm{d}\vec{S} \tag{7}$$

ici S est le trajectoire.

La force étant liée à l'interaction, le travail d'une force représente l'énergie apportée par l'interaction (champs) au corps. Une force peut, par exemple, augmenter l'énergie cinétique d'un corps. Dans ce cas, le travail est positif. Si le travail est négatif, l'interaction *diminue* l'énergie du corps. Par exemple, la force lié au frottement effectue toujours un travail négatif : un corps en mouvement soumis à une seule force de frottement perd l'énergie cinétique.

2.4 Conservation de l'énergie

Puisque l'énergie représente la quantité de la matière, elle reste constante dans un système isolé : c'est la loi de conservation d'énergie. Bien que formulée très simplement, cette loi permet de résoudre de nombreux problèmes physiques, particulièrement, dans les contextes ou de différents domaines physiques sont impliqués (thermique, électrique, mécanique, etc...).

On peut considérer que les systèmes mécaniques possèdent trois types d'énergies :

– Energie cinétique,

– Energie potentielle,

– Energie que l'on peut appeller interne "*non-mécanique*" du système.

Les deux premiers types ont déjà été discutés. Le troisième type d'énergie représente *toutes les autres formes d'énergie physiques possibles.* Nous sommes obligés de le considérer dans le cas où il y a lieu une conversion d'énergie mécanique en énergie électrique, thermique, solaire, etc... Dans le cas le plus classique, lorsqu'un système possède des interactions dissipatives (frottement), il y a une conversion d'énergie cynétique en énergie thermique : nous sommes donc obligé de considérer ce troisième terme dans l'établissement du bilan des énergies. Le bilan des énergies s'écrit donc de la manière suivante :

$$W_{cinetique} + W_{potentielle} + W_{interne} = const = W_0 \quad (8)$$

W_0 est l'énergie totale du système. Strictement dit, $W_{interne}$ inclut l'énergie atomique, thermique, etc... Evidemment, dans la plupart des cas on ne peut et ne souhaite pas la calculer, puisque nous nous intéressons à la part de l'énergie interne qui est liée à la conversion de l'énergie mécanique. Dans ce cas, on passe aux différentiels d'énergie dans un intervalle Δt donné, et la formule se simplifie :

$$\Delta W_{cinetique} + \Delta W_{potentielle} + \Delta W_{interne} = 0 \quad (9)$$

C'est cette formule que nous allons utiliser pour l'analyse de nos systèmes électromécaniques.

Très souvent, on parle de la puissance, qui exprime l'évolution de l'énergie en unité de temps :

$$P = \frac{\partial W}{\partial t}. \quad (10)$$

La puissance se mesure en Joules sur secondes, et cette unité s'appelle Watt :

$$Watt = \frac{Joule}{seconde}. \quad (11)$$

Les chiffres de la puissance sont souvent plus parlant que les chiffres de l'énergie : par exemple, lorsque l'on parle de la consommation électrique, on veut toujours savoir l'énergie que consomme un appareil en une unité de temps. La phrase "L'ordinateur consomme 1 MJ d'énergie" n'a pas de sens sans mention de la période pendant laquelle ce mégajoule se consomme.

2.5 Grandeurs mécaniques et la loi dynamique

Les grandeurs dynamiques spécifiquement mécaniques que nous allons utiliser dans le cours sont la coordonnée $\vec{x}$, la vitesse $\vec{v}$, l'accéleration $\vec{a}$. Ces grandeurs sont vectorielles et se trouvent en lien mathématique suivant :

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{x}}. \quad (12)$$

A ces grandeurs il faut ajouter la force, l'énergie cinétique et potentielle.

Nous allons utiliser trois paramètres mécaniques : la masse, la rigidité d'un ressort et le facteur d'amortissement. Nous parlerons des deux derniers paramètres plus tard.

La loi mécanique fondamentale est la deuxième loi de Newton qui s'écrit de la manière suivante :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}. \quad (13)$$

Cette loi permet de connaître l'évolution des coordonnées (le mouvement) d'un corps si on connaît les interactions dans lesquelles il participe, i.e., si on connaît les forces qui lui sont appliquées.

2.6 Eléments mécaniques et sources des forces

Dans notre cours, nous allons utiliser trois types d'éléments mécaniques idéalisés : une masse, un ressort et un amortisseur. Voici leurs définitions.

– Une masse pure représente les propriétés inertielles d'un corps. Une masse est un élément idéalisé à un seul terminal mécanique. Un terminal est un point matériel, et est caractérisé par sa coordonnée $\vec{x}$. La loi dynamique (de mouvement) d'une masse pure s'exprime ainsi : une force appliquée à une masse provoque son accélération égale au rapport entre la force appliquée et la masse (cf. la deuxième loi de Newton) :

$$\vec{f} = m\vec{a}. \quad (14)$$

Ainsi, pour trouver le mouvement de la masse, il faut résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{\vec{x}} = \vec{f}/m. \quad (15)$$

– Un ressort est un élément mécanique à deux terminaux mécaniques qui est le plus souvent considéré dans un contexte unidimensionnel. Chaque terminal est donc caractérisé par sa coordonnée (x_1, x_2). Le ressort génère une force sur chaque terminal, qui est proportionnelle à la *déformation* du ressort :

$$F_{x1} = k(\partial x_2 - \partial x_1), \quad (16)$$
$$F_{x2} = k(\partial x_1 - \partial x_2), \quad (17)$$

k s'appelle "rigidité" ou "constante de raideur" du ressort. Le signe moins dans cette formule signifie que la force mécanique générée par le ressort est orienté de sorte à s'opposer à la déformation.

Dans un cas où un terminal de ressort est fixé, i.e., $\partial x_2 = 0$, et l'axe x_1 est choisi de sorte à ce que la position du terminal 1 soit dans l'origine pour le ressort non-déformé, on obtient une relation bien connue :

$$F_{x1} = -kx_1. \tag{18}$$

– Un amortisseur est également un élément mécanique à deux terminaux mécaniques qui est le plus souvent considéré dans un contexte unidimensionnel. Chaque terminal est donc caractérisé par sa coordonnée (x_1, x_2). L'amortisseur génère une force sur chaque terminal. Ces forces sont proportionnelles à la *vitesse* de la déformation de l'amortisseur, et de la même manière, s'oppose à la déformation *dynamique* :

$$F_{x1} = \mu(\partial\dot{x_2} - \partial\dot{x_1}), \tag{19}$$
$$F_{x2} = \mu(\partial\dot{x_1} - \partial\dot{x_2}), \tag{20}$$

Comme pour le ressort, souvent un terminal de l'amortisseur est fixé. Dans ce cas, on peut noter [3] :

$$F_{x1} = \mu\dot{x}_1 \tag{21}$$

2.7 Equivalence électromécanique

Une équivalence électromécanique est basée sur la similitude d'équations mathématiques exprimant les lois dynamiques pour les systèmes électriques et mécaniques. Elle est résumée dans la table 1.

2.8 Résonateurs mécaniques

Un résonateur mécanique est un système composé d'une masse, d'un ressort et d'un amortisseur (fig. 1). Si ces trois éléments sont distincts, on parle d'un résonateur "à paramètres localisés", c.a.d., les trois propriétés fondamentales (l'inertie, l'élasticité et la dissipation) sont isolées et localisées dans les éléments correspondants. Dans les résonateurs réels, ces propriétés

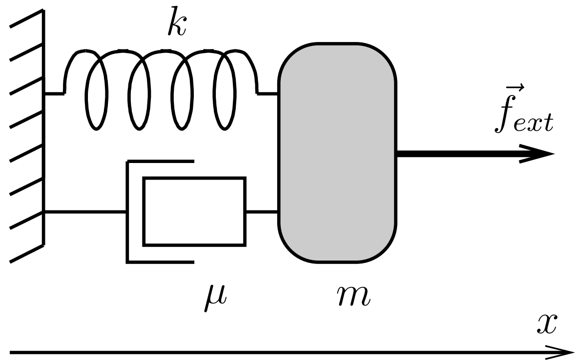

Figure 1 –

sont reparties (par ex., une corde vibrante). Dans ce cours, nous ne considérons que des systèmes mécaniques à paramètres localisés. Une force externe peut s'exercer sur la masse.

La dynamique d'un résonateur mécanique se décrit par la seconde loi de Newton :

$$-k\vec{x} - \mu\dot{\vec{x}} + \vec{f}_{ext} = m\ddot{\vec{x}} \tag{22}$$

Ici $\vec{x}$ est la coordonnée de la masse mobile, $\vec{f}_{ext}$ est la force externe qui s'exerce, éventuellement, sur la masse mobile.

Afin de mettre en évidence l'équivalent électromécanique, il est intéressant de re-écrire cette équation sous la forme :

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = f_{ext} \tag{23}$$

Ici nous avons remplacé les vecteurs par leurs projections sur l'axe x.

Si maintenant on applique la transformée de Laplace à deux parties de cette équation, nous obtenons :

$$m \cdot p^2 X + \mu \cdot pX + k \cdot X = F_{ext} \tag{24}$$

Ici les majuscules représentent les images de Laplace des grandeurs correspondants.

Si maintenant on remarque que pX représente l'image de Laplace de la vitesse V, nous pouvons écrire :

$$mp \cdot V + \mu \cdot V + \frac{k}{p} \cdot V = F_{ext} \tag{25}$$

Sachant que la vitesse est équivalente au courant électrique, la force est équivalente à la f.e.m., les coefficients devant les vitesses représentent les *impédances* mécaniques associés aux éléments

3. Pourquoi nous n'avons pas besoin de spécifier, comme pour le cas de ressort, le choix de la position de l'origine de l'axe x_1 ?

TABLE 1 – Résume des équivalences entre les grandeurs électriques et mécaniques.

Grandeur mécanique	Grandeur électrique
Force, f	Force électromotrice, $\mathscr{E}$, égale au moins la tension, $-u$.
Vitesse, v	Courant, i
Position, x	Charge, q
Masse, m	Inductance, L
Rigidité, k	L'inverse de capacité, $1/C$
Facteur d'amortissement μ	Résistance, R

correspondant. Ainsi, l'impédance mécanique d'une force f appliquée à un point se déplaçant à vitesse v se définit par la formule :

$$\Psi = \frac{-F(p)}{V(p)}. \tag{26}$$

Ainsi, la masse a une impédance pm, l'amortisseur μ et le ressort k/p. On établit aisément l'équivalence électromécanique entre un résonateur mécanique fig. 1 et un résonateur électrique RLC série branché sur une source de tension. Un tel circuit se décrit par la loi des mailles, à l'aide de l'équation suivante :

$$(Z_c + Z_L + Z_r)I = E, \tag{27}$$

où E est l'image Laplace de la f.e.m. de la source de tension, I est le courant, Z sont les impédances électriques des trois composants passifs. Ainsi, en maîtrisant bien les propriétés d'un résonateur RLC série, il est facile de comprendre la dynamique d'un résonateur mécanique.

3 Transducteurs capacitifs (électrostatiques)

3.1 Transduction électromécanique

Un système électromécanique est un système multiphysique : il fonctionne dans le domaine électrique, où les grandeurs dynamiques sont la charge, le courant et la tension, et mécanique, où les grandeurs dynamiques sont le déplacement, la vitesse et l'accélération. Le couplage (lien) entre ces domaines s'effectue grâce aux éléments spécifiques qui s'appellent "transducteurs". Un transducteur électromécanique est une "passerelle" qui permet au grandeurs dynamiques et électriques de "s'échanger d'information". Les convertisseurs électrostatiques occupent une place très importante dans les MEMS : nous allons étudier en détails leur fonctionnement, architectures et utilisation.

3.2 Condensateur : géométrie et intérêt

A base d'une transduction capacitive se trouve la dépendance de la capacité électrique de la géométrie du condensateur. Un transducteur électrique est donc un condensateur dont au moins un des éléments (électrodes) est mobile, et donc réalise un lien direct du domaine mécanique (la coordonnée de la partie mobile) vers le domaine électrique (la valeur de la capacité). Nous allons voir, qu'il existe un lien dans le sens inverse : le domaine électrique peut également communiquer une information vers le domaine mécanique. Dans la plupart des cas, nous considérons un condensateur plan (fig. 2) dont la capacité s'exprime de la manière suivante :

$$C = \epsilon_0 \epsilon \frac{S}{d} \tag{28}$$

Ici ϵ_0 est la permittivité du vide, ϵ est la constante diélectrique du matériau entre les électrodes, S est l'aire de recouvrement des électrodes, d est la distance entre les électrodes. Généralement, dans les MEMS, entre les électrodes il y a de l'air ou du vide, ainsi $\epsilon \approx 1$.

Dans la formule de la capacité (28) il y a deux paramètres géométriques que l'on peut faire varier d'une manière mécanique : l'aire de recouvrement et la distance entre les plans. Cela permet de réaliser une conversion de l'information du domaine mécanique vers le domaine électrique. Par exemple, on peut détecter un mouvement en

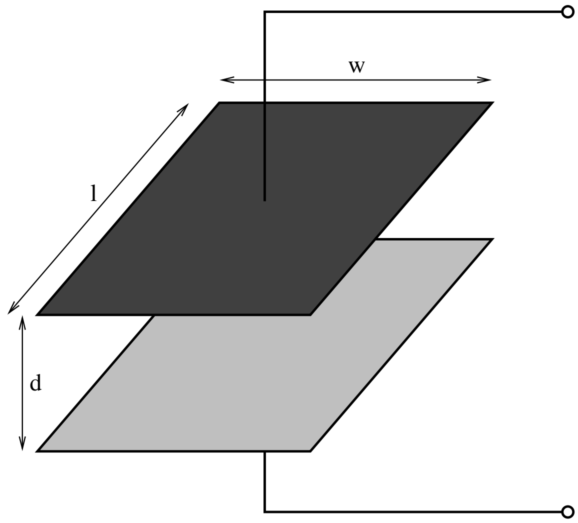

FIGURE 2 –

mesurant la variation de la capacité par les techniques de mesure électrique. Nous considérons deux configurations correspondant à la variation de ces deux paramètres. Ces techniques trouvent une application dans les capteurs de pression, accéléromètres, gyroscopes, etc.

Dans certains cas, notamment dans le domaine de la microfluidique, on fait varier ϵ de l'entrefer entre les électrodes. On ne considère pas ce cas dans ce cours.

3.2.1 Transducteur en mouvement vertical

Soit un condensateur plan dont une électrode est fixée (pour convenance), l'autre est mobile et peut se déplacer uniquement selon l'axe perpendiculaire aux plans des électrodes (*gap-closing motion*), cf. fig. 3. Dans ce cas, la distance entre les électrodes varie comme $d-x$, où d est la distance (gap) au repos. L'axe x a son origine au niveau de la position repos de l'électrode mobile, et est orienté à l'intérieur du condensateur. La capacité s'exprime comme :

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d-x}. \tag{29}$$

Ainsi, la capacité d'un tel condensateur varie en fonction du déplacement, à travers une loi algébrique non-linéaire. Ainsi, pour la détection du mouvement, il faut mettre en oeuvre un circuit de mesure d'une capacité.

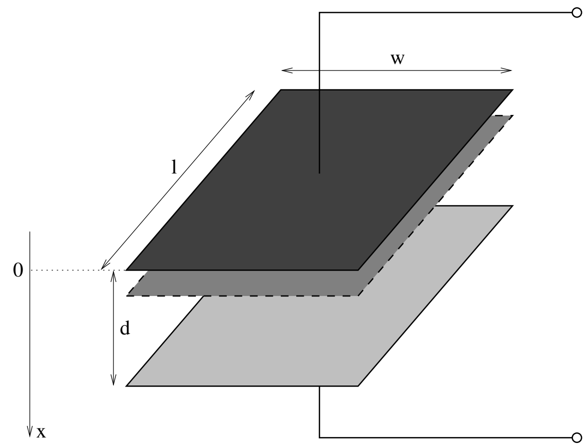

FIGURE 3 – Condensateur en mouvement vertical.

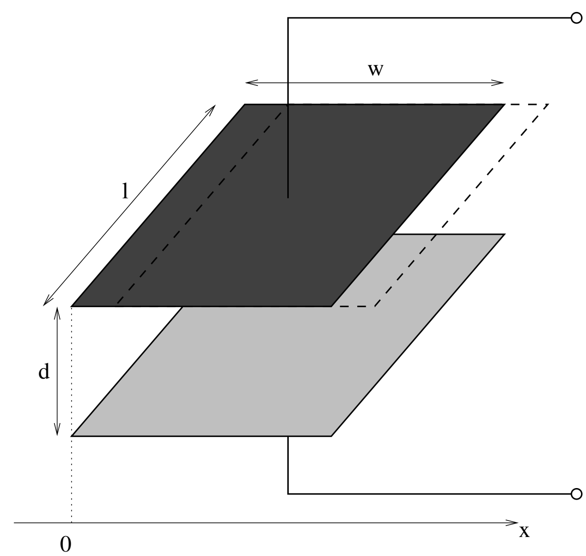

FIGURE 4 –

3.2.2 Transducteur en mouvement latéral

Supposons maintenant que dans la formule (28) nous modifions non pas d mais S, en faisant glisser une électrode de sorte à ce qu'il reste dans son plan (fig. 4). Si on suppose que l'électrode a une forme rectangulaire, avec longueur l et largeur w, et si le mouvement de l'électrode mobile fait varier la largeur, on obtient :

$$C = \epsilon_0 \frac{l(w-|x|)}{d}. \tag{30}$$

Ici x désigne la coordonnée sur l'axe se trouvant dans le plan de l'électrode mobile. Notez

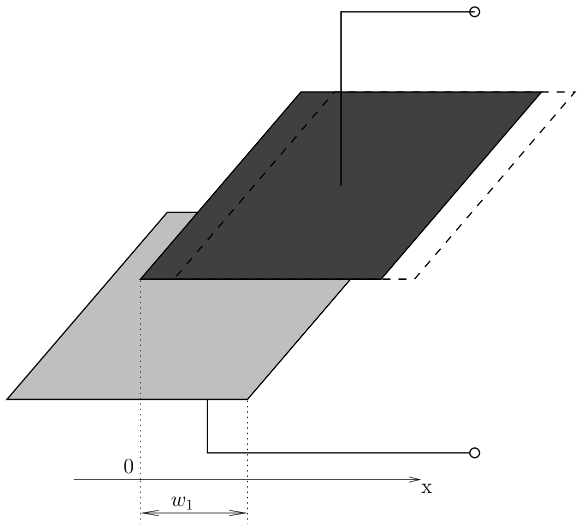

FIGURE 5 –

que selon la géométrie initiale du condensateur, on peut également avoir une relation linéaire :

$$C = \epsilon_0 \frac{l(w - x)}{d}. \tag{31}$$

(cf. fig. 5).

3.2.3 La géométrie du transducteur

Afin d'augmenter la valeur de la capacité des transducteurs électrostatiques MEMS, on met plusieurs transducteurs en parallèle. Cette technique se traduit par l'utilisation des transducteurs à géométrie "peigne interdigitée", ex. fig. 6, où on présente un transducteur en mouvement latéral réalisé avec deux structures en peignes. Il est évident que la formule pour la capacité reste la même (eq. (31), mais multipliée par N, où N est le nombre de capacités élémentaires (sur la fig.6, $N = 8$).

Dans le cas où le mouvement est vertical, comme présenté fig. 7, la situation est un peu plus complexe. Le transducteur capacitif est représenté par N segments composés de 2 capacités variables, qui varient en opposition de phase. Ainsi, la capacité d'un tel transducteur vaut :

$$C = N\left(\epsilon_0 \frac{S}{d - x} + \epsilon_0 \frac{S}{d + x}\right) = N\epsilon_0 \frac{2d}{d^2 - x^2}. \tag{32}$$

Ici x est le déplacement de la partie mobile de la position du milieu, pour laquelle les deux capacités de chaque segment sont identiques.

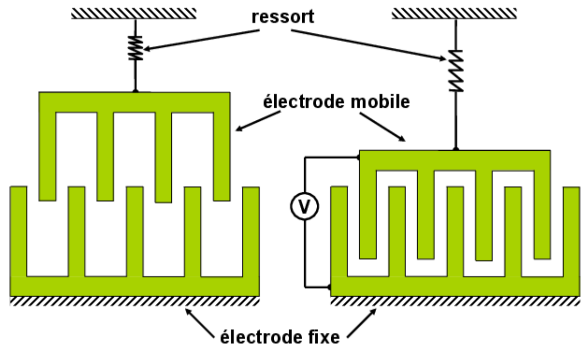

FIGURE 6 – Architecture d'un transducteur à mouvement latéral, à peines interdigitées.

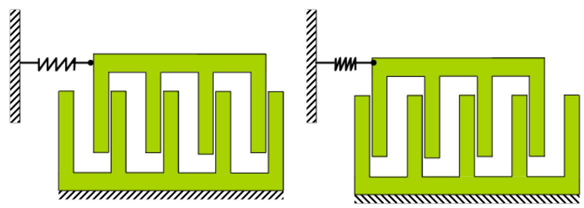

FIGURE 7 – Architecture d'un transducteur à mouvement verticale, à peines interdigitées.

La particularité de cette configuration est une relation *non-monotone* entre la capacité et le déplacement, ce qui peut être intéressant pour certaines applications.

3.3 Transduction du domaine électrique vers le domaine mécanique

Les plans du condensateur se trouvent en une interaction à travers le champs électrique emmagasiné entre eux. Ainsi, il existe une force exercée par ce champs sur les charges des électrodes. Cette force est attractive, i.e., les forces agissant sur les électrodes tendent à les rapprocher. Cette force dépend bien sûr de la géométrie du condensateur et de la quantité de charge qu'il emmagasine (la tension). Ainsi, en faisant varier la tension d'un condensateur, il est possible de faire varier la force agissant sur les électrodes. Si une électrode est rendue mobile, cette force peut mettre en mouvement un système mécanique, ainsi, on obtient un certain contrôle du système mécanique à travers un signal électrique. Dans les sous-paragraphes suivants on calculera la force d'un condensateur pour un cas général, ensuite on considérera les mêmes deux cas de capacité variable que nous avons étudiés pour la transduction mécanique-électrique.

3.3.1 Energie de condensateur et calcul de la force : cas général

Il est connu de la théorie d'électricité que l'énergie d'un condensateur s'exprime comme :

$$W_p = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}. \tag{33}$$

Ici Q est la charge du condensateur, U est la différence de potentiel entre les plans de la capacité, W_p est l'énergie du condensateur. Pour passer d'une formule à l'autre, on a utilisé la relation $Q = CU$.

Il s'agit ici d'une énergie potentielle, car elle est liée à l'interaction entre les charges concentrées sur les plans du condensateur. Cette énergie est *positive.* [4].

Pour calculer la force agissant entre deux électrodes de condensateur plan chargé, deux méthodes existent. La première est basée sur la loi de Coulomb qui permet de calculer une force d'interaction entre deux charges ponctuelles. En découpant les électrodes de condensateur en charges ponctuelles, et en effectuant une intégration, on peut calculer les forces. Cependant, cette méthodes est très lourde pour les calculs. La deuxième méthode est basée sur la définition de la force (4), et est immédiate. Si on considère un condensateur chargé et isolé (électriquement et mécaniquement), son énergie potentielle est donnée par 33. Nous avons donc pour la force agissant sur une électrode mobile dans l'axe $\vec{x}$:

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{\partial(Q^2/(2C))}{\partial x} = \tag{34}$$

$$-\frac{1}{2}Q^2\frac{\partial(1/C)}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{2}U^2\frac{\partial C}{\partial x}. \tag{35}$$

Il faut comprendre ∂x ici comme un déplacement infinitésimal de l'électrode dans l'axe $\vec{x}$. La difficulté de la compréhension de cette formule réside dans le fait qu'elle est valable également dans le cas statique, i.e., dans le cas où il n'y a pas de déplacement (donc, aussi pour une capacité fixe). En fait, il faut considérer le déplacement dx comme "virtuelle", qui est juste une figure de l'esprit utile pour mesurer (calculer) la force.

4. Dans les livres de la physique on peut trouver l'affirmation que l'énergie potentielle liée aux forces d'attraction est négative. Question : pourquoi l'énergie d'un condensateur chargé est positive, alors que les plans d'un condensateur s'attirent ?

Ainsi, une électrode d'un condensateur chargé subit de la part du champ de la capacité une force qui agit dans le sens d'accroissement d'une capacité. Cette force est proportionnelle au carré de la tension appliquée au condensateur. Cette dépendance peut être utilisée pour communiquer de l'information et de l'énergie du domaine électrique vers le domaine mécanique.

A partir de cette théorie, il est maintenant possible d'étudier de différents cas de transducteurs capacitifs.

3.3.2 Application au transducteur en mouvement vertical

La composante verticale de la force existant entre les électrodes d'un condensateur plan se calcule à partir des formules (35) et (29) :

$$F = \frac{1}{2}U^2\epsilon_0\frac{\partial}{\partial x}\frac{S}{(d-x)} = \frac{1}{2}U^2\epsilon_0\frac{S}{(d-x)^2} \tag{36}$$

Ainsi, la force générée par un condensateur plan sur un de ses électrodes se déplaçant dans l'axe perpendiculaire aux plans des électrodes est une fonction algébrique non-linéaire de la tension et du déplacement de l'électrode mobile (x). Strictement dit, ce dernier point est gênant : on aimerais que la grandeur de sortie (la force) ne dépende que de la grandeur d'entrée (la tension). Par la suite, nous allons voir que ce lien entre la position de l'électrode mobile et la force génère des phénomènes très intéressants.

3.3.3 Application au transducteur en mouvement latéral

Pour le cas d'une relation linéaire entre la capacité et le déplacement (31), la force générée par le condensateur sur l'électrode mobile s'exprime comme :

$$F_x = \frac{1}{2}U^2\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{2}U^2\epsilon_0\frac{l}{d} \tag{37}$$

Notez qu'il ne s'agit pas d'une force *totale* générée par le condensateur ; mais de sa composante vectorielle correspondant à l'axe de déplacement de l'électrode. En général, la géométrie de l'électrode mobile est conçue de sorte à ce qu'elle puisse se déplacer uniquement dans l'axe x (longitudinale), ainsi, seule la composante correspondante de la force peut avoir une influence.

Ici, la force ne dépend pas de la position de l'électrode mobile, mais uniquement de la tension. Cette configuration est bien plus favorable pour réaliser la fonction de transduction.

3.3.4 Application : comparaison entre les deux cas

Pour un condensateur plan avec $w = 100\mu$m, $l = 50\mu$m, $d = 1\mu$m, calculez :

– La valeur de la capacité au repos,

– L'expression de la force verticale en fonction de x, où x est le déplacement vertical d'une des électrodes,

– La valeur de la force latérale en fonction de x, où x est le déplacement latéral d'une des électrodes.

Calculez les valeurs des forces pour $x = 0$ et $U = 10V$.

3.4 Transduction du domaine mécanique vers le domaine électrique

Soit l'électrode mobile du transducteur se déplace selon une loi x(t). Le but d'une transduction mécanique-électrique est de générer une grandeur électrique en relation avec le comportement mécanique de l'électrode variable.

Comme nous avons dit, une conversion électrique - mécanique s'effectue grâce à la variation de la valeur de la capacité de condensateur lorsque l'électrode mobile se déplace. Il faut donc mesurer sa capacité. Une des techniques classiques de mesure de capacité consiste à lui appliquer une tension, et de mesurer sa charge. La charge peut être mesurée en intégrant le courant qui charge le condensateur. Une schéma typique de mesure d'une capacité variable est donné fig. 8. Nous avons donc une source de tension fixe (tension de polarisation) appliquée au condensateur, et un ampèremètre qui mesure le courant. Supposons que la capacité du condensateur varie dans le temps, selon une loi quelconque $C(t)$, sous action d'un signal d'entrée. Vu que la tension de la capacité est constante, la charge doit varier :

$$q = CU_0 \tag{38}$$

Le courant vaut :

$$i = \frac{\partial Q}{\partial t} = U_0 \frac{\partial C}{\partial t} = U_0 \frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} = U_0 \frac{\partial C}{\partial x} \cdot v \tag{39}$$

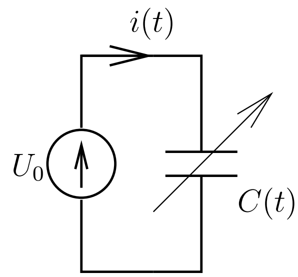

FIGURE 8 –

Ainsi, le courant mesuré à travers la capacité est proportionnel à la vitesse de déplacement de l'électrode mobile. Le facteur de proportionnalité est donné par le produit

$$\delta = U_0 \frac{\partial C}{\partial x} \tag{40}$$

qui, en cas général, dépend de x et donc, de t.

3.5 Modèle petit signal d'un transducteur capacitif

Nous avons vu qu'un transducteur capacitif est, dans le cas général, un élément non-linéaire. Dans un contexte de traitement du signal (mesure, transmission de l'information), nous nous intéressons le plus souvent aux relations linéaires. Pour les obtenir, on polarise les éléments non-linéaires et on utilise un représentation petit signal. Ici nous allons présenter le modèle petit signal d'un transducteur capacitif et montrons le contexte électrique dans lequel peut s'insérer ce modèle.

Dans le contexte de traitement de signal, on suppose que les quantités dynamiques du système ont des valeurs fixes (continues, DC, biais ou de polarisation), auxquelles sont superposées de petites variations. Pour faire les calculs, on se tient aux règles suivantes :

– Une petite grandeur est considérée comme ayant un ordre de petitesse 1,

– La dérivée d'une petite grandeur est une petite grandeur du même ordre de petitesse, – Un produit de deux petites grandeurs d'ordre 1 est négligé devant une petite grandeur d'ordre 1. Cette règle ne s'applique qu'aux sommes, éventuellement pondérées.

Ainsi, on considère que le déplacement s'effectue autour d'une position moyenne X_0 :

$$X(t) = X_0 + x(t). \tag{41}$$

ici x est la composante variable petit signal du déplacement.

La vitesse, étant une dérivée de $X(t)$, n'a qu'une composante de petit signal $v(t)$.

La capacité variable $C(x)$ est approximée comme :

$$C(x) = C_0 + \partial C = C_0 + \left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{x=X_0} \cdot x \qquad (42)$$

La dérivée de la capacité variable $\frac{\partial C(x)}{\partial x}$ est également une quantité dynamique qui varie dans le temps, et donc :

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{x=X_0} + \left.\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right|_{x=X_0} \cdot x \qquad (43)$$

3.5.1 Conversion mécanique-électrique

On se met dans le contexte décrit dans paragraphe 3.4. L'expression (39) se combine avec (43), pour donner :

$$i = U_0 \left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{x=X_0} \cdot v, \qquad (44)$$

où v est la vitesse de déplacement de l'électrode mobile. Pour obtenir cette dernière expression, on a négligé le terme de seconde ordre comportant le produit de v et x.

Le paramètre δ est défini comme "facteur de transduction" :

$$\delta = U_0 \left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{x=X_0}. \qquad (45)$$

s'appelle "facteur de transduction". Pour les raisons évidentes, il doit être maximisé (afin de maximiser la sensibilité du transducteur). Pour cela il faut maximiser U_0 et le gradient de la capacité.

Ainsi, dans le domaine électrique, un transducteur capacitif en régime de transduction mécanique-électrique peut être vu comme une source de courant qui génère un courant proportionnel à la vitesse de déplacement de l'électrode mobile.

3.5.2 Conversion électrique-mécanique

Dans le contexte de conversion électrique-mécanique, la grandeur d'entrée est la tension appliquée au condensateur, la grandeur de sortie est la force. On reprend la relation (35) :

$$F_x = \frac{1}{2} U(t)^2 \frac{\partial C}{\partial x}. \qquad (46)$$

En régime de petit signal, on suppose, comme on le fait pour les circuits électriques non-linéaires, que la tension $U(t)$ est une superposition d'une source de polarisation U_0 et d'une source de (petit) signal $u(t)$:

$$U(t) = U_0 + u(t), \quad u(t) \ll U_0. \qquad (47)$$

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à une pure génération de la force, on supposera que l'électrode mobile est fixe, a la position X_0 et $x(t) = 0$. Plus loin on prendra en compte une éventuel mouvement de l'électrode mobile.

Ainsi, nous obtenons :

$$F_x = \frac{1}{2}(U_0 + u(t))^2 \frac{\partial C}{\partial x} = \qquad (48)$$

$$\frac{1}{2}(U_0^2 + u(t)^2 + 2U_0 u(t)) \frac{\partial C}{\partial x}. \qquad (49)$$

On s'intéresse uniquement à la composante variable de force (à la composante petit signal). On obtient l'expression correspondante en considérant que $u(t)$ est une petite grandeur d'ordre 1, en combinant cette expression avec (43) et en négligeant tous les termes d'ordre 0 (composante continue) et 2 (plus faibles que les autres termes) :

$$f_x(t) = U_0 \left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{x=X_0} \cdot u(t) = \delta u(t), \qquad (50)$$

où $f_x(t)$ est la composante variable (petit signal) de la force générée par le transducteur.

Nous voyons apparaître le même facteur de transducteur δ que nous avons trouvé lors de l'analyse de transduction mécanique-électrique.

3.5.3 Transduction bidirectionnelle : fonctionnement couplé

Lors de l'analyse du condensateur variable dans le contexte de transducteur, nous avons considéré une transmission unilatérale de l'information (énergie). Par exemple, pour le cas de transduction mécanique - électrique nous avons considéré que le déplacement est imposé du coté mécanique, sans se poser la question du mécanisme le permettant. En réalité, le fait d'appliquer la tension U_0 crée une force supplémentaire sur l'électrode mobile. Si cette tension est très élevée, la force peut être grande et donc perturber le déplacement que l'on souhaite mesurer : nous devons en tenir compte. De même, dans notre modèle de la transduction "électrique-mécanique", nous avons ignoré de possibles mouvements de l'électrode mobile (en disant que $\frac{\partial C}{\partial x}$ est constant). Or, si on souhaite générer une force mécanique, c'est probablement pour générer un mouvement. Donc, en réalité, l'électrode mobile bouge ; puisque le transducteur subit la composante U_0 de la tension $U(t)$, il va générer un courant qui, probablement, perturbera la source $u(t)$... Ainsi, nous somme face à ce que l'on appelle "un comportement couplé", lorsque des grandeurs physiques appartenant aux domaines différents se trouvent en dépendance mutuelle.

Dans ce sous-paragraphe nous proposons d'étudier le fonctionnement de transducteur lorsque simultanément, il subit une tension variable $U(t) = U_0 + u(t)$ et lorsque l'électrode mobile présente de petits déplacement autours de la position d'équilibre $X_0 + x(t)$.

Le coté électrique : calculons le courant qui traverse la source $U(t)$:

$$\begin{aligned}
&i(t) = \tfrac{\partial Q}{\partial t} = \tfrac{\partial}{\partial t}(C(t)U(t)) = \\
&\tfrac{\partial}{\partial t}((C_0 + \tfrac{\partial C}{\partial x}\Big|_{x=X_0} \cdot x) \cdot (U_0 + u(t))) = \\
&\tfrac{\partial}{\partial t}(C_0U_0 + U_0\tfrac{\partial C}{\partial x}\Big|_{x=X_0} \cdot x + u(t)C_0 + \\
&u(t)U_0\tfrac{\partial C}{\partial x}\Big|_{x=X_0} \cdot x) \approx \\
&\tfrac{\partial}{\partial t}(U_0\tfrac{\partial C}{\partial x}\Big|_{x=X_0} \cdot x + u(t)C_0) = \\
&U_0\tfrac{\partial C}{\partial x}\Big|_{x=X_0} \cdot \tfrac{\partial x}{\partial t} + C_0\tfrac{\partial u(t)}{\partial t} = \\
&C_0\tfrac{\partial u(t)}{\partial t} + U_0\tfrac{\partial c(x)}{\partial x}v
\end{aligned} \tag{51}$$

Le courant de capacité est alors composé de deux termes : le courant correspondant à celui d'une capacité fixe de valeur C_0, et le courant lié au déplacement de l'électrode mobile de la capacité variable.

Considérons maintenant la force générée par le transducteur sur l'électrode mobile. D'après la formule (49), nous avons :

$$F(t) = \frac{1}{2}(U_0^2 + u(t)^2 + 2U_0u(t))\frac{\partial C}{\partial x} \tag{52}$$

Cependant, maintenant on ne fait pas l'hypothèse sur l'immobilité de l'électrode mobile. En conséquence, $\frac{\partial C}{\partial x}$, étant en général une fonction de x, varie avec le temps selon (43). En négligeant les termes de second ordre de petitesse, on a :

$$F(t) \approx \frac{1}{2}U_0^2\frac{\partial C}{\partial x}\Big|_{x=X_0} + U_0\frac{\partial C}{\partial x}\Big|_{x=X_0} \cdot u(t) + \tag{53}$$

$$\frac{1}{2}U_0^2\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\Big|_{x=X_0} \cdot x \tag{54}$$

Etant intéressé par la composante variable (petit signal) de la force, on omet le premier terme et on obtient :

$$f(t) \approx \delta u(t) + \frac{1}{2}U_0^2\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\Big|_{x=0} \cdot x \tag{55}$$

Le premier terme de cette formule a déjà été présenté, il est lié à la transduction électrique-mécanique. En revanche, le deuxième terme relève un phénomène très intéressant qui s'appelle "ressort électrostatique". En effet, ce deuxième terme représente une force qui est proportionnelle au déplacement : c'est exactement la définition d'un ressort (cf. le paragraphe 2.6). Ainsi, un transducteur capacitif polarisé se comporte dans le domaine mécanique comme un ressort avec la constante de raideur k_t :

$$k_t = -\frac{1}{2}U_0^2\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\Big|_{x=0}. \tag{56}$$

(pour comprendre l'origine du signe moins, comparez le deuxième terme de (55) avec (18)).

Ce qui est remarquable dans ce phénomène est que la rigidité du ressort électrostatique dépend de la tension appliquée. Nous allons voir plus tard que cette propriété peut être utilisée pour ajuster ou varier la fréquence de résonance des résonateurs électromécaniques.

Ainsi, dans le domaine mécanique, un transducteur électrostatique est un ressort électrostatique plus une source de force proportionnelle à la tension petit signal appliqué au transducteur.

3.5.4 Schéma équivalent petit signal électromécanique et mécanique d'un transducteur capacitif

Pour obtenir un schéma équivalent petit signal d'un transducteur électrostatique, rappelons les formules qui relient les grandeurs électriques et mécaniques en mode petit signal :

$$\begin{cases} f = \delta u - k_t x \\ i = \delta v + C_0\dot{u} \end{cases} \tag{57}$$

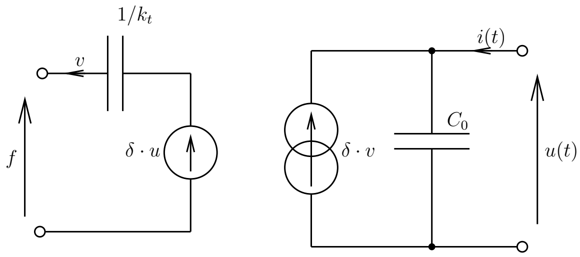

Figure 9 –

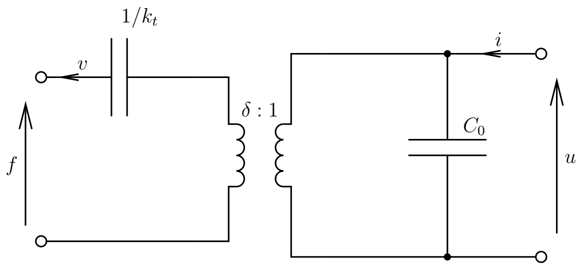

Figure 10 –

Il est intéressant de profiter de l'équivalence électromécanique pour représenter ce schéma dans le domaine électrique uniquement. En utilisant l'information donnée dans la table 1, nous pouvons dire qu'un transducteur est une source de tension (force) dans le domaine mécanique, et la grandeur qui commande le courant dans le domaine électrique est la vitesse - donc courant. Le ressort est remplacé par un condensateur. x est une dérivée de v, et v est équivalent au courant dans la représentation électrique de systèmes mécaniques. Ainsi, le schéma équivalent d'un transducteur est donné fig. 9.

Ce schéma contient un couple de sources commandées. Cette topologie est connue dans la théorie de circuit comme un *transformateur idéal*, avec rapport de nombre de spires des deux bobines de 1 :δ. Un transformateur idéal est obtenu à l'aide de deux bobines à facteur d'induction mutuelle de 1. Cela est possible si la section de chaque bobine est traversées par l'intégralité du flux magnétique généré par l'autre. Un transformateur idéal avec rapport de nombre de spires de 1 :N a les propriétés suivantes :

– Les tensions sur les bobines 1 et 2 se rapportent comme 1 :N

– les courants dans les bobines 1 et 2 se rapporte comme N :1

– Par conséquent, le circuit connecté à la bobine 2 voit l'impédance connectée à la bobine 1 divisé par N^2, le circuit connecté à la bobine 1 voit l'impédance connectée à la bobine 2 multiplié par N^2.

Ainsi, on arrive au schéma équivalent petit signal communément admis donné fig. 10.

4 Energie de transducteur

On peut démontrer qu'un transducteur transmet de l'énergie en mode petit signal.

Soit un cas général : un transducteur est soumis à une tension $U_0 + u(t)$, où $u(t) << U_0$, et la partie mobile du transducteur se déplace avec vitesse $v(t)$, de sorte à ce que le déplacement reste petit.

Dans ce cas, la partie mobile subit une force composée de trois termes, selon l'équation (54).

La puissance moyenne généré par le transducteur est donnée comme

$$P_{mech} = \frac{1}{t}\int_0^t f \cdot v \cdot dt \tag{58}$$

Si $u(t)$ et $v(t)$ sont sinusoïdaux de même fréquence, seul le deuxième terme de (54) (celui proportionnel à u) donne une puissance moyenne non-nulle lorsque multiplié par $v(t)$:

$$\begin{aligned} lP_{mech} &= \frac{1}{t}\int_0^t u(t)U_0 \left.\frac{\partial C(x)}{\partial x}\right|_{x=X_0} \cdot v(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{t}\delta \int_0^t u(t)v(t) \cdot dt \end{aligned} \tag{59}$$

(La moyenne de produit de déplacement et de vitesse sinusoïdaux est nulle, car il s'agit d'un produit de deux sinusoïdes déphasés de $\pi/2$)

En faisant un calcul identique du coté électrique, nous avons, pour la puissance moyenne :

$$P_{elec} = \frac{1}{t}\int_0^t i \cdot U \cdot dt = \tag{60}$$

$$P_{elec} = \frac{1}{t}\int_0^t i \cdot (U_0 + u(t)) \cdot dt \tag{61}$$

Le courant se calcule selon la formule (51). On a :

$$i \cdot U = U_0 C_0 \frac{\partial u(t)}{\partial t} + U_0^2 \left.\frac{\partial C(x)}{\partial x}\right|_{x=X_0} v \tag{62}$$

$$+ u C_0 \frac{\partial u(t)}{\partial t} + u U_0 \left.\frac{\partial C(x)}{\partial x}\right|_{x=X_0} v \tag{63}$$

Seul le dernier terme a une moyenne temporelle non-nulle, donc, on a pour la puissance moyenne :

$$P_{elec} = \frac{1}{t}\int_0^t uU_0 \left.\frac{\partial C(x)}{\partial x}\right|_{x=X_0} vdt = \quad (64)$$

$$\frac{1}{t}\int_0^t uU_0 \left.\frac{\partial C(x)}{\partial x}\right|_{x=X_0} vdt = \quad (65)$$

$$\frac{1}{t}\delta\int_0^t uv\cdot dt = \quad (66)$$

Ainsi, on voit que les puissances des cotés électriques et mécaniques sont identiques. Le transducteur effectue donc bien un transfert d'énergie entre deux domaines.

5 Stabilité d'un transducteur mécanique : phénomène de *pull-in*

Nous avons vu que le facteur de transduction d'un ressort dépend directement de la tension de polarisation. Pourquoi serait-il impossible d'augmenter la tension jusqu'à de valeurs très grandes, afin de maximiser la transduction ? Déjà ils existent des limites liées au claquage du matériau diélectrique (oxyde de silicium, l'air...). Mais le plus souvent, avant que la tension n'atteigne les valeurs pour lesquelles ces problèmes apparaissent, se produisent des phénomènes de l'instabilité liés à la nature même du transducteur.

Considérons un transducteur réalisé à l'aide d'un condensateur plan avec une électrode mobile dans le sens verticale (fig. 11). Soit cette électrode raccordée à un ressort de rigidité k. Appliquons une tension continue U_0 à ce transducteur, et observons l'état d'équilibre du système. A l'équilibre, la force F_t générée par le ressort doit équilibrer la force $-kx$ générée par le transducteur :

$$F_t - kx = 0. \quad (67)$$

Ici x est la position d'équilibre du système.

F_t est donné par l'équation (36), ainsi

$$\frac{1}{2}U_0^2\epsilon_0\frac{S}{(d-x)^2} - kx = 0. \quad (68)$$

Cette équation algébrique de troisième ordre n'a pas de solution analytique, mais d'une manière qualitative, on peut comprendre le phénomène si on essaye de résoudre graphiquement cette équation (cf. le dessin). On dessine

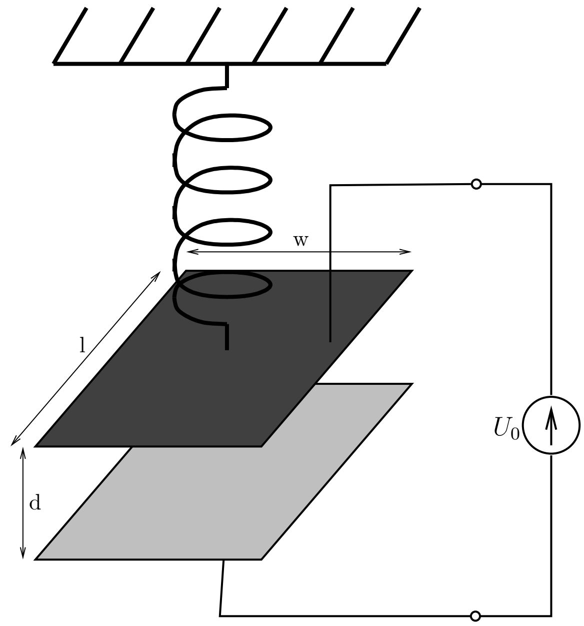

Figure 11 –

le graphique de F_t et kx en fonction de x, et on cherche le (les) points d'intersection. On voit que l'on peut avoir trois cas : deux, un ou zéro points d'intersection. On peut démontrer que lorsqu'il y a deux points d'intersection, celui à gauche (avec x le plus petit) est stable, l'autre est instable. Le cas où il y a 1 point d'intersection est un cas limite ne se produisant jamais en pratique. En revanche, le cas où il n'y a pas de points d'intersection est le plus intéressant. Dans ce cas, pour tous les x entre 0 et d, la force générée par le condensateur est supérieure à la force de rappel du ressort. Ainsi, l'électrode mobile se rapprochera de l'électrode fixe... jusqu'à entrer en contact avec. Cela se produit très rapidement et dépend de la dynamique du système (notamment de la masse associée au ressort). Ce phénomène, appelé pull-in, est utile dans certains cas (switch, commutateur...), mais peut être désastreux dans d'autres. Trouvons les conditions sous lesquelles le système "transducteur-ressort-source de tension" n'a pas de point d'équilibre, i.e., les condition de pull-in.

Nous ne pouvons pas trouver les racines de l'équation (68). Cependant, on peut trouver les conditions pour lesquelles cette équation n'a pas de racines sur l'intervalle $[0, d]$. Pour cela, on la réécrit :

$$\frac{U_0^2 S\epsilon_0}{2k} = x(d-x)^2. \quad (69)$$

La fonction $y = x(d-x)^2$ est une "cloche"

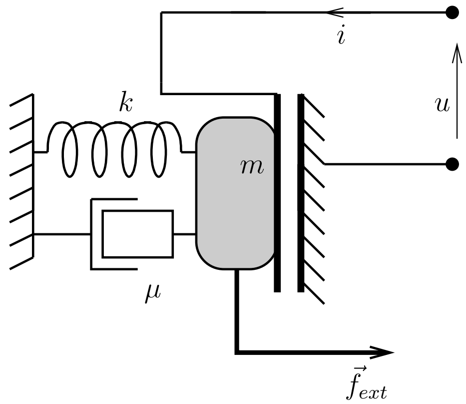

FIGURE 12 –

avec un maximum à $x = d/3$ et touchant l'axe des abscisses dans $x = 0$ et $x = d$. La fonction $y = U_0^2 S\epsilon_0 k$ est une droite parallèle à l'axe des abscisses. Elle croisera la cloche en deux point si le sommet de la cloche se trouve plus haut que $U_0^2 S\epsilon_0 k$. Le sommet de la cloche se trouve à $\frac{d}{3}(d - \frac{d}{3})^2 = \frac{4d^3}{27}$. Ainsi, l'équation aura une solution si

$$\frac{U_0^2 S\epsilon_0}{2k} > \frac{4d^3}{27} \tag{70}$$

Cela donne une condition sur la tension U_0 :

$$U_0 > \sqrt{\frac{8kd^3}{27S\epsilon_0}} \tag{71}$$

Cette tension s'appelle "Tension de pull-in". C'est donc une tension maximale que l'on peut appliquer à un transducteur électrostatique en mouvement vertical, associé à un ressort k.

5.1 Applications

1. Calculer les constantes de raideur électrostatique pour un transducteur capacitif fait à partir d'une capacité plane, pour le cas de déplacement vertical et latéral.

2. Pour le condensateur avec la géométrie suivante : $S = 1cm \times 1cm$, $d = 20\mu m$ et pour un ressort avec $k = 100N/m$, calculez la tension de pull-in.

5.2 Association des résonateurs avec des transducteurs capacitifs

Lorsque l'on associe un micro-résonateur avec un transducteur, on obtient un dispositif complexe agissant dans le domaine électrique ainsi que dans le domaine mécanique (fig. 12). Du point de vue de l'électronique, il s'agit d'un dispositif à 2 terminaux à dynamique complexe. Physiquement, entre ces deux terminaux il y a une capacité variable ; mais il faut être conscient que ce n'est pas *juste* une capacité variant selon une loi connue. La variation de cette capacité dépend de la force externe qui agit éventuellement sur le résonateur, ainsi que de la tension appliquée aux bornes de la capacités. En effet, la tension appliquée au transducteur génère une force sur le résonateur. Cette force est susceptible de modifier la dynamique des mouvement du résonateur, et donc la loi de la variation de la capacité variable.

Si on ne s'intéresse qu'au fonctionnement "petit signal" du système, on peut associer le modèle équivalent électrique du transducteur (fig. 10) avec celui d'un résonateur mécanique (un réseau RLC série). On obtient le schéma présenté fig. 13.

Il faut être conscient que ce réseau électrique modélise les phénomènes électriques et mécaniques ; la ligne de séparation passe par le transformateur, comme indiqué sur la figure.

Ainsi, le circuit électrique "voit" les éléments du résonateur, ainsi que la source de la force externe, à travers le transducteur représenté par le transformateur idéal associé aux deux capacités parasites $1/k_t$ et C_0. Il est connu qu'un transformateur idéal fonctionne comme une "lentille" d'impédance. En effet, **la partie électrique "voit" directement la partie mécanique,** seulement, les courants (vitesses), les tensions (forces) et les impédances du coté mécaniques sont mises à l'échelle :

$$i_x = \delta v,\ u_x = -f/\delta, Z_x = \Psi/\delta^2. \tag{72}$$

Ici, les indices x signifient que les grandeurs correspondants sont des "images" des processus ayant lieu dans le domaine mécanique. On nomme ces grandeurs "courant, tension, impédance *liés au déplacement*", ou *motional current, voltage, impedance*. Ainsi, le schéma électrique équivalent d'un résonateur mécanique à interface capacitive est donné sur fig. 14. Un telle configuration de résonateur est toute à fait classique : les résonateurs piézoélectriques, par exemple, ont le même schéma équivalent. On peut voir, qu'un résonateur complet possède 2

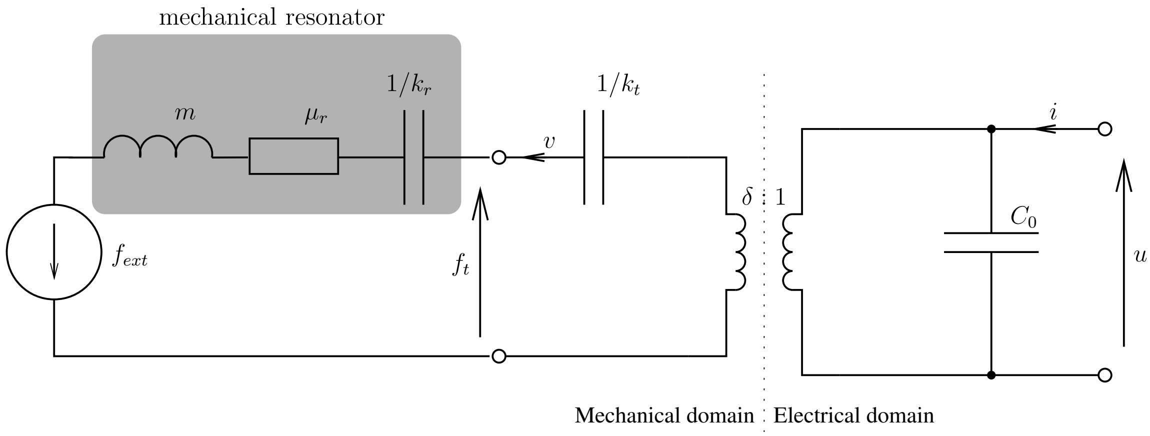

FIGURE 13 –

parasites : une capacité parallèle due à la capacité physique du transducteur au repos, et une capacité *négative* en série avec le réseau RLC, qui modifie la valeur de la capacité série du résonateur. Ces deux capacités produisent les effets suivants :

– La capacité δ^2/k_t modifie la fréquence de résonance série du résonateur. Puisque k_t est négative, la capacité série équivalente $C_{eq\ x}$ du résonateur vaut :

$$\frac{1}{C_{eq\ x}} = \frac{k_t}{\delta^2} + \frac{k_r}{\delta^2} = \frac{1}{\delta^2}(k_r - |k_t|) \tag{73}$$

ce qui modifie la fréquence de résonance série du résonateur :

$$\omega_x = \frac{1}{\sqrt{L_x C_{eq\ x}}} = \frac{1}{\sqrt{L_x C_{eq\ x}}} = \sqrt{\frac{k_r - |k_t|}{m}}. \tag{74}$$

On voit que la fréquence de résonance série n'est déterminée que par les éléments mécaniques *et* par le ressort équivalent généré par le transducteur. Sachant que k_t dépend de la tension de polarisation du transducteur, on obtient un résonateur mécanique à fréquence de résonance *contrôlée par une tension.*

– La capacité C_0, en parallèle avec le résonateur RLC série, crée un mode d'oscillation que l'on appelle "antirésonance". En effet, on peut montrer que si dans le circuit de la fig. 14 la fonction de transfert est définie comme i/u, cette capacité n'ajoute pas de pôles supplémentaires, mais un zéro à la fréquence proche de la fréquence de la résonance série :

$$\omega_z = \frac{1}{\sqrt{L_x \frac{C_{eq\ x} C_0}{C_{eq\ x} + C_0}}}. \tag{75}$$

Cette capacité C_0 a une influence néfaste sur l'utilisation du résonateur. En effet, le rôle du résonateur est, généralement, de *sélectionner* une bande de fréquences proche de la fréquence de résonance, et d'atténuer les fréquences éloignées de la fréquence de résonance. En cas d'un résonateur RLC série, cela se fait par la différence entre l'impédance du résonateur à la fréquence de résonance (égale à R) et l'impédance hors la fréquence de résonance (tendant vers l'infini, et augmentant à raison de 20 dB/décade au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la fréquence de résonance). Cependant, la capacité parasite C_0 en parallèle avec le résonateur *limite* cette augmentation de l'impédance, et ainsi fait dégrader les propriétés filtrantes du résonateur. On peut caractériser cette dégradation par le rapport entre l'impédance du résonateur série à la résonance (μ/σ^2) et l'impédance de la capacité parallèle à la même fréquence $1/(\omega_x C_0)$:

$$\left.\frac{Z_x}{Z_{C_0}}\right|_{\omega=\omega_x} = \frac{\mu/\sigma^2}{1/(\omega_x C_0)} = \tag{76}$$

$$\frac{C_0}{C_{eq\ x}} \cdot \frac{1}{Q}, \tag{77}$$

où Q est le facteur de qualité du résonateur série composé d'éléments L_x, μ_x et $C_{eq\ x}$. Cette dernière formule s'obtient si on se souvient que

$$Q = \frac{m\omega_x}{\mu} = \frac{k}{\omega_x \mu} \tag{78}$$

pour un résonateur mécanique avec ressort de raideur k, un amortisseur à coefficient d'amortissement μ et à masse m. Pour un résonateur

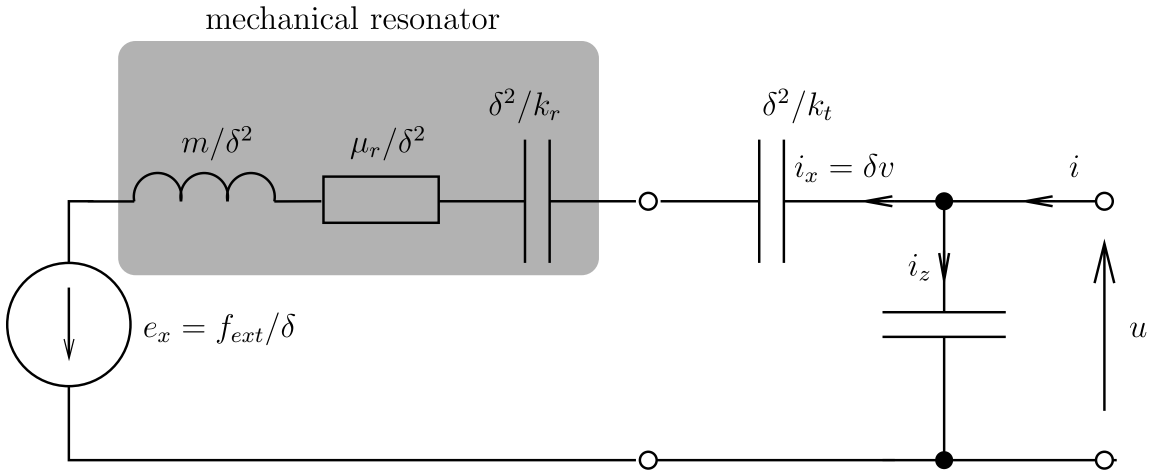

FIGURE 14 – Modèle électrique équivalent d'un résonateur mécanique avec transducteur capacitif.

RLC, Q se définit comme :

$$Q = \frac{L\omega_x}{R} = \frac{1}{C\omega_x R} \tag{79}$$