

Cours 8. Méthodes d'analyse des circuits non-linéaires

Par Dimitri GALAYKO
Unité d'enseignement Élec-info
pour master ACSI à l'UPMC

Octobre-décembre 2005

1 Généralités : éléments avec et sans mémoire

La diode est un élément non-linéaire. En effet, en y appliquant une somme de deux tensions on n'obtient pas une somme des courants correspondant à chacune des tensions appliquée séparément :

$$I_D(U_{D1} + U_{D2}) \neq I_D(U_{D1}) + I_D(U_{D2}). \quad (1)$$

(Démontrez cette propriété.)

Une diode est alors une dipôle non-linéaire pour lequel on connaît la caractéristique tension-courant :

$$I_D = f(U_D), \quad (2)$$

où U_D et I_D sont la tension et le courant de la diode.

Dans l'expression de la caractéristique « courant-tension » la tension est souvent prise comme l'argument ; ceci est dû à l'usage et au fait qu'en pratique il est plus facile à générer et à imposer une tension qu'un courant. Il s'agit plutôt d'une habitude, d'une tradition, mais non pas d'une règle – des contre-exemples existent.

Ainsi, on peut dire qu'une diode est un élément semblable à une résistance, à cette différence près que pour une résistance la fonction $f(U_R)$ est linéaire, alors que pour une diode elle est exponentielle.

L'état d'une diode et d'une résistance à un instant t est uniquement déterminé par leurs tensions et courants à ce même instant et ne dépend

pas des états du passé. Les éléments possédant cette propriété s'appellent « éléments sans mémoire ».

Par opposition, les éléments réactifs, tels que les capacités et les inductances, sont des éléments « avec mémoire », car leur état instantané dépend des états du passé. Par exemple, pour connaître le courant du condensateur, il faut connaître la *dérivée* de sa tension par rapport au temps, *i.e.* l'évolution du courant entre le moment t et l'instant immédiatement précédent $t - \delta t$.

Les relations entre les courants et les tensions des éléments sans mémoire sont décrites par des équations algébriques, alors que les relations entre les tensions et les courants des éléments avec mémoire sont donnés par des équations différentielles.

Si les équations décrivant les éléments sont linéaires, on parle d'éléments linéaires, comme les résistances, les inductances et les condensateurs. Dans le cas contraire les éléments sont non-linéaires, comme les diodes. Jusque là nous n'avons pas présenté un élément réactif non-linéaire ; tel est, par exemple, un condensateur dont la charge dépend d'une manière non-linéaire de la tension :

$$q_C = CU - C_1U^3. \quad (3)$$

Ainsi, le courant dans un tel condensateur dépend d'une manière non-linéaire de la tension et de sa première dérivée :

$$i_C = C \frac{dU}{dt} + 3C_1U^2 \frac{dU}{dt}. \quad (4)$$

Par conséquent, les circuits comportant des éléments non-linéaires avec mémoire se décrivent par des équations différentielles non-linéaires.

En électronique on a rarement affaire aux composants réactifs non-linéaires ; la plupart des circuits non-linéaires utilisent seulement des éléments non-linéaires sans mémoire (associés, éventuellement, avec des éléments linéaires avec ou sans mémoire).

Dans la plupart des cas il est nécessaire d'analyser les circuits non-linéaires en régime de courant continu. On parle alors d'une analyse en *régime statique*. Il s'agit, généralement, de résoudre un système d'équations algébriques non-linéaires. Lorsque un circuit contenant des éléments non-linéaires est soumis à des sources de tension ou de courant variables dans le temps, il s'agit d'un *régime dynamique*, qui est décrit par des équations algébriques ou différentielles non-linéaires.

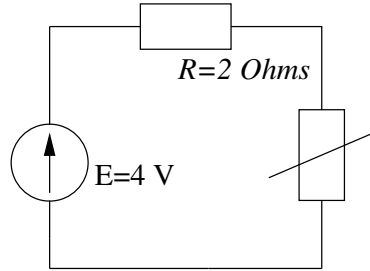


FIG. 1 – Exemple de circuit comportant un élément non-linéaire.

Il n'existe pas de méthode générale pour résoudre les équations non-linéaires. D'ailleurs, dans la plupart des cas, la solution ne peut pas être exprimée analytiquement.

De différentes approches sont employées pour analyser les circuits non-linéaires. Dans les paragraphes suivant nous en présentons quelques-unes les plus importantes.

2 Régime statique

2.1 Méthode graphique

Il s'agit d'une méthode graphique de la résolution des équations algébriques non-linéaires. Supposons que nous souhaitions calculer le courant dans le circuit de la figure 1, qui inclut un élément non-linéaire avec une caractéristique courant-tension $I(U)$ donnée, une résistance et une source de tension continue, les trois dipôles étant branchés en série.

Le courant se trouve à partir de la loi des mailles :

$$E = R \cdot I(U) + U, \quad (5)$$

où I et U sont le courant et la tension de l'élément non-linéaire.

Dans le cas général, cette équation n'a pas de solution analytique.

L'idée de la méthode graphique est de représenter le circuit par deux dipôles raccordés en parallèle et en série, comme c'est montré figure 2.

Ainsi, d'après la loi de nœuds et la loi des mailles,

$$I_1 = I_2, \quad U_1 = U_2. \quad (6)$$

Notez que les sens conventionnels positifs des courants et des tensions sont définis différemment pour les deux dipôles : pour la résistance et la source la convention est générateur, pour le dipôle non-linéaire la convention est

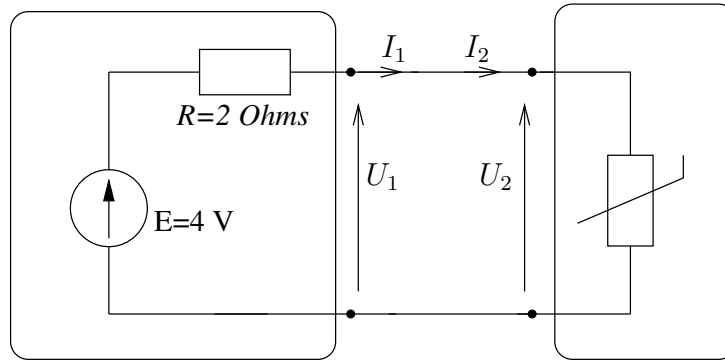


FIG. 2 – Circuit non-linéaire représenté par deux dipôles raccordés en série et en parallèle.

récepteur¹. Ainsi, d'après la loi des nœuds, les courants I_1 et I_2 doivent être égaux, alors que si les conventions étaient identiques pour les deux dipôles, ils seraient opposés ce qui compliquerait légèrement le calcul qui va suivre.

Par défaut, la caractéristique courant-tension est définie pour une convention récepteur, i.e. la même que pour une résistance, cf. la définition du sens conventionnel positif de I_2 et U_2 à la figure 2.

Soit la caractéristique tension-courant du dipôle donnée par un graphique de la figure 3.

Cette caractéristique définit le rapport entre le courant I_2 et la tension U_2 du circuit de la figure 2. Il faut alors représenter la caractéristique entre I_1 et U_1 dans les mêmes axes et ensuite trouver les coordonnées du point d'intersection des deux caractéristiques.

Pour un dipôle composé d'une source de tension et une résistance raccordées en série, la caractéristique courant-tension est affine, et en respectant la convention pour U_1 et I_1 définie figure 2 nous avons :

$$I_1 = \frac{E}{R} - U_1 \cdot \frac{1}{R}. \quad (7)$$

En utilisant les valeurs de R et de E , nous avons :

$$I_1 = 2 - 0.5U_1, \quad (8)$$

¹Rappelons, que lorsque la tension et le courant définis selon la convention générateur sont positifs, le dipôle produit une énergie électrique *i.e.* la puissance dissipée est négative, alors qu'en cas de la convention récepteur, l'élément consomme de l'énergie électrique, *i.e.* la puissance dissipée est positive.

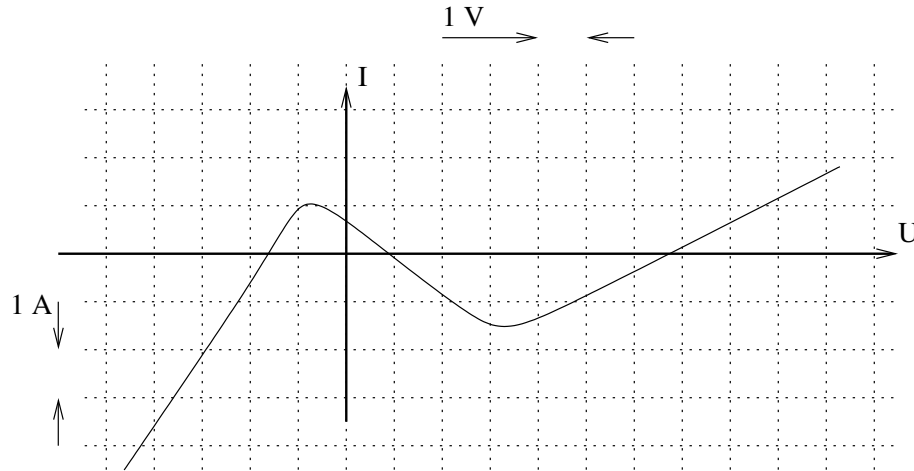


FIG. 3 – Caractéristique courant-tension de l'élément non-linéaire utilisé dans la présentation des méthodes d'analyse des circuits non-linéaires.

où la U_1 est exprimée en volts, I_1 en ampères.

On trace $I_1(U_1)$ et $I_2(U_2)$ dans les mêmes axes (figure 4).

On voit que les deux caractéristiques ont une intersection à $I = -0.7A$, $U = 5.4V$. C'est donc la tension et le courant de l'élément non-linéaire de la figure 1.

Le caractère visuel de la méthode graphique permet d'analyser le circuit qualitativement et de comprendre ce qui se passe si l'on fait varier un des paramètres du circuit. Par exemple, ici il est évident que pour certaines valeurs de la tension E et de la résistance R , on peut avoir deux ou trois intersections : cela veut dire que le circuit peut se trouver dans un des plusieurs états. Différents facteurs peuvent influencer l'état définitif du circuit : la stabilité (tous les états ne sont pas stables), les conditions initiales etc... L'étude de ces aspects dépasse le cadre de notre module, car dans la plupart des cas que l'on rencontre en pratique, l'état du circuit est défini d'une manière unique.

Notez que dans les circuits linéaires les tensions et les courants sont *toujours* définis d'une manière unique, car leurs caractéristiques courant-tension sont toujours des droites entre lesquelles, sauf cas dégénérés, il existe une seule intersection.

2.2 Approximation par un dipôle à caractéristique courant-tension linéaire par morceaux

Afin d'analyser le comportement des circuits incluant les éléments non-linéaires, on représente un élément non-linéaire par un modèle linéaire ap-

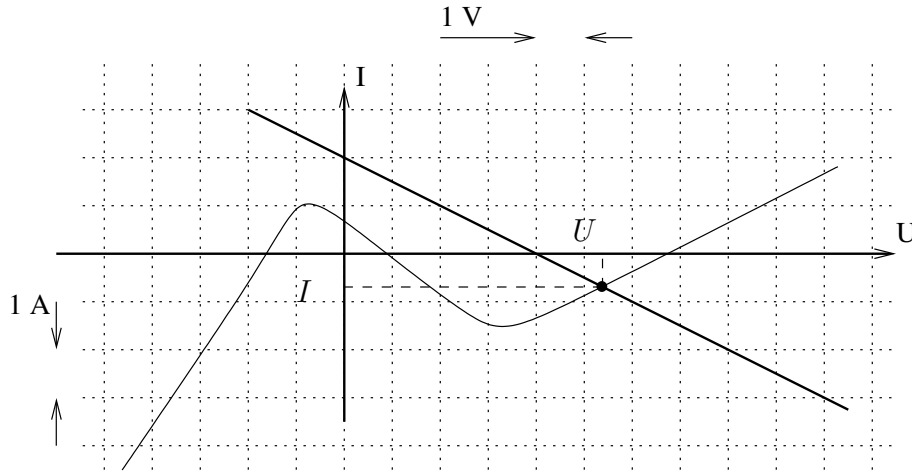


FIG. 4 – Illustration de la méthode graphique d’analyse des circuits non-linéaires.

proximé. Cette substitution conduit plus ou moins à une dégradation de la précision des calculs, mais permet d’avoir une idée sur le fonctionnement du circuit et de faire des estimations approximatives des grandeurs du circuit.

Très souvent sur la caractéristique courant-tension il est possible de distinguer des zones dans lesquelles l’élément peut être apparenté à un élément linéaire. On parle des *zones* ou des *régimes* de fonctionnement. Ainsi, dans chaque régime un élément non-linéaire est décrit par une équation linéaire qui définit un élément électrique linéaire. Dans le cas des éléments sans mémoire ce sont les sources réelles de tension ou de courant².

Prenons l’exemple de l’élément dont la caractéristique courant-tension est donnée figure 3.

On distingue trois régimes de fonctionnement correspondant aux plages de tension suivantes : $(-\infty, U_1)$, (U_1, U_2) et $(U_2, +\infty)$ (figure 5). Ainsi, sur ces intervalles, on peut approximer la caractéristique par des droites (la figure 5, le graphique en ligne épaisse).

Chaque droite décrit une source réelle de tension ou de courant continu. La pente de la droite donne la valeur inverse de la résistance interne de la source. La coordonnée de son intersection avec l’axe des tensions ou des courants donne la tension nominale ou le courant nominal de la source (selon le type de la source). Notez, que même si sur l’intervalle où le modèle est valable la droite ne croise par l’axe des tensions ou des courants, on cherche le point d’intersection en extrapolant la droite en dehors de l’intervalle de sa

²Démontrez que la caractéristique courant-tension d’un dipôle composé d’une source de tension en série avec une résistance est une droite.

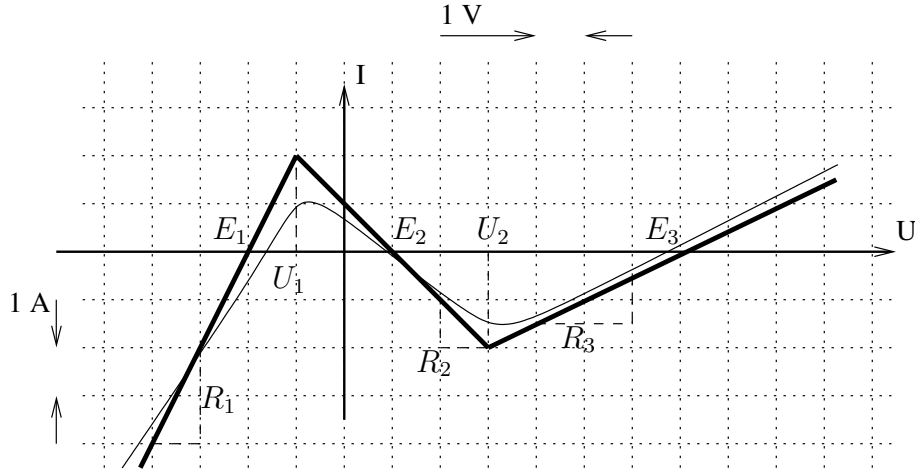


FIG. 5 – Caractéristique courant-tension de l'élément non-linéaire approchée par une fonction continue linéaire par morceaux.

validité.

Ainsi, l'élément décrit par la courbe de la figure 5 peut être modélisé par une source de tension réelle, dont les paramètres dépendent de la zone de fonctionnement. La caractéristique courant-tension approximée est donnée par :

$$I(U) = \begin{cases} U/R_1 - E_1/R_1, & U < U_1, \\ U/R_2 - E_2/R_2, & U_1 < U < U_2, \\ U/R_3 - E_3/R_3, & U > U_2 \end{cases}, \quad (9)$$

où U et I sont la tension et le courant associés à l'élément non-linéaire.

Notez, que d'après le graphique de la fonction approximée (figure 5) dans l'intervalle (U_1, U_2) la résistance interne de la source équivalente est négative.

Pour montrer un exemple d'analyse, trouvons le courant et la tension de l'élément non-linéaire du circuit de la figure 1. D'après le graphique de la figure 1, l'approximation linéaire par morceaux de la caractéristique courant-tension $I(V)$ est donnée par l'expression :

$$I(U) = \begin{cases} U/0.5 + 2/0.5, & U < -2, \\ U/(-1) - 1/(-1), & -2 < U < 3, \\ U/2 - 7/2, & U > 3 \end{cases}. \quad (10)$$

Pour trouver la tension et le courant de l'élément non-linéaire, il faut savoir dans quel régime, *i.e.* dans quelle zone, il fonctionne : connaissant cela, dans (5) on substitue $I(U)$ par une fonction linéaire et la solution de

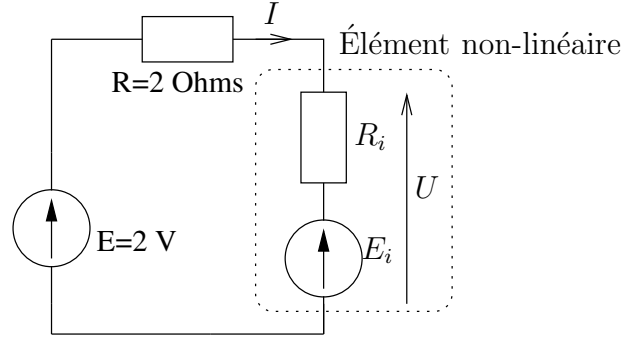


FIG. 6 – Modélisation de l’élément non-linéaire par une source de tension réelle.

l’équation devient triviale. Or précisément, on ne sait pas quelle est la zone de fonctionnement ; c’est là la difficulté de l’analyse des circuits non-linéaires.

Pour connaître la zone de fonctionnement sans utiliser des méthodes numériques, on avance des hypothèses. On va supposer, par exemple, que la tension sur l’élément non-linéaire se trouve dans l’intervalle (U_1, U_2) . Nous remplaçons l’élément par son modèle qui est linéaire *pour toutes les tensions et les courants* (cf. la figure 6). Ce nouveau circuit est linéaire, or il est équivalent au circuit original uniquement lorsque la tension se trouve dans l’intervalle (U_1, U_2) .

En analysant le nouveau circuit de la figure 6, on trouve la tension et le courant sur l’élément non-linéaire. *Si ces grandeurs correspondent à la zone pour laquelle le modèle est valable, notre hypothèse est juste, dans le cas contraire, il faut faire une autre hypothèse.* Ainsi, au pire, à chaque hypothèse on exclut une zone dans lequel l’élément non-linéaire ne peut pas se trouver.

Appliquons cette méthode au circuit de la figure 1.

Supposons que le circuit se trouve dans la zone I ($U < -1V$). Ainsi, $E_i = -2V$, $R_i = 0.5\text{ Ohm}$. Donc, le courant dans l’élément non-linéaire vaut $(E - E_i)/(R_i + R) = (4 - (-2))/(2 + 0.5) = 2.4A$, la tension $U = R_i I + E_i = 2.4 \cdot 0.5 + (-2) = -0.8V$. Manifestement, l’hypothèse quant à la zone de fonctionnement est fautive, car le modèle avec $E_i = -2V$, $R_i = 0.5\text{ Ohm}$ n’est valable que si $U < -1V$.

Supposons maintenant que le circuit fonctionne en zone II, *i.e.* $-1V < U < 3V$. Ainsi, $E_i = 1V$, $R_i = -1\text{ Ohm}$. Ainsi, le courant vaut $(4 - 1)/(2 + (-1)) = 3A$ et la tension $U = 3 \cdot (-1)\text{ Ohms} + 1 = -2V$. L’hypothèse est fautive car le modèle est valable si $-1V < 0V < 3V$.

En zone III $E_i = 7V$, $R_i = 2\text{ Ohm}$. Ainsi, le courant vaut $(4 - 7)/4 = -0.75A$ et la tension $E_i = -0.75A \cdot 2\text{ Ohms} + 7 = 5.5V$. L’hypothèse est manifestement juste.

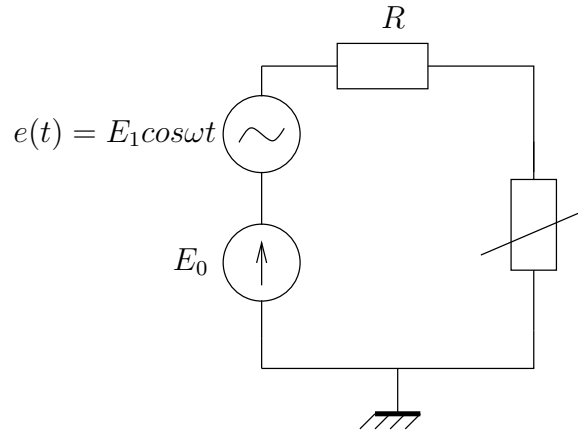


FIG. 7 – Circuit contenant un élément non-linéaire fonctionnant en régime dynamique.

Ainsi, $I = -0.75A$, $U = 5.5V$. Ceci est proche des valeurs obtenues par la méthode graphique.

3 Régime dynamique

L'électronique s'intéresse au traitement du signal. Par conséquent, pratiquement tous les systèmes de l'électronique sont conçus pour fonctionner en régime dynamique, *i.e.* lorsque les variables d'entrée et de sortie évoluent dans le temps.

L'exemple le plus simple (mais néanmoins suffisamment général) d'un circuit non-linéaire fonctionnant en régime dynamique est donné à la figure 7. Ce circuit inclut une source de tension continue, une source de tension alternative, une résistance et un élément non-linéaire, tous les quatre étant raccordés en série. La tension totale appliquée au circuit contient une composante continue et une composante variable dans le temps (alternative); on représente cette tension comme la somme des tensions générées par deux sources raccordées en série :

$$U_{source}(t) = E_0 + e(t) = E_0 + E_1 \cos(\omega t). \quad (11)$$

Ici la forme d'onde de la composante alternative est sinusoïdale, mais en pratique cela peut être n'importe quelle fonction.

On souhaite déterminer l'allure du courant dans l'élément non-linéaire.

On distingue deux régimes de fonctionnement dynamique des circuits non-linéaires : régime de grand signal et régime de petit signal.

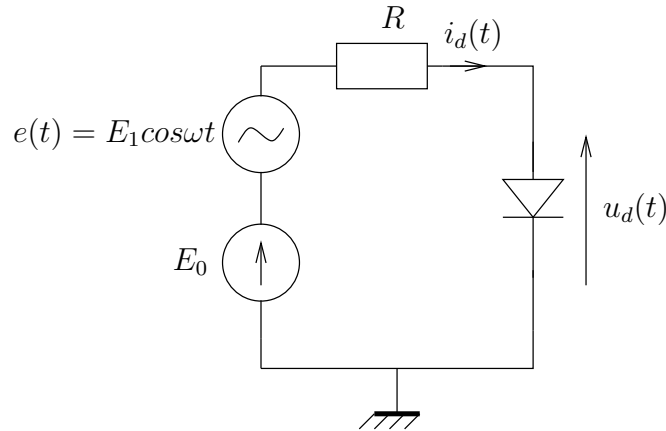


FIG. 8 – Circuit utilisant une diode en régime dynamique.

3.1 Régime grand signal

C'est le cas le plus général : l'amplitude de la composante variable est tellement grande que durant une période, l'élément non-linéaire se trouve, d'une manière consécutive, en différents régimes. Une étude analytique du circuit est impossible dans la plupart des cas ; il faut considérer la caractéristique courant-tension dans son intégralité et utiliser des méthodes numériques. Prenons l'exemple d'une diode branchée selon le schéma de la figure 8, avec $E_0 = -1V$, $f = 1Hz$, $E_1 = 2V$, $R = 10\Omega$. Le système est alors décrit par l'équation (5) dans laquelle la tension constante E est remplacée par la tension variable définie par (11) :

$$E_0 + e(t) = E_0 + E_1 \cos(\omega t) = R \cdot i_D(u_D(t)) + u_D(t), \quad (12)$$

En résolvant l'équation (12) par une méthode numérique *pour chaque* t nous obtenons pour le courant et la tension de la diode les graphiques présentés figure 9. Nous les avons tracés dans les axes de la caractéristique courant-tension de la diode.

La forme d'onde de la tension et du courant de la diode est complexe ; les lois d'évolution de ces grandeurs ne peuvent pas être exprimées par une fonction analytique. En revanche, on remarque que la diode peut être décrit par une caractéristique courant-tension linéaire par morceaux. Elle a en effet deux zones quasi linéaires, I et II, comme indiqué figure (9). On voit que dans la zone I la diode se comporte comme un circuit ouvert : la tension sur la diode est égale à la tension de la source, le courant est défini par la résistance est nul. En revanche, dans la zone II la diode se comporte comme une source

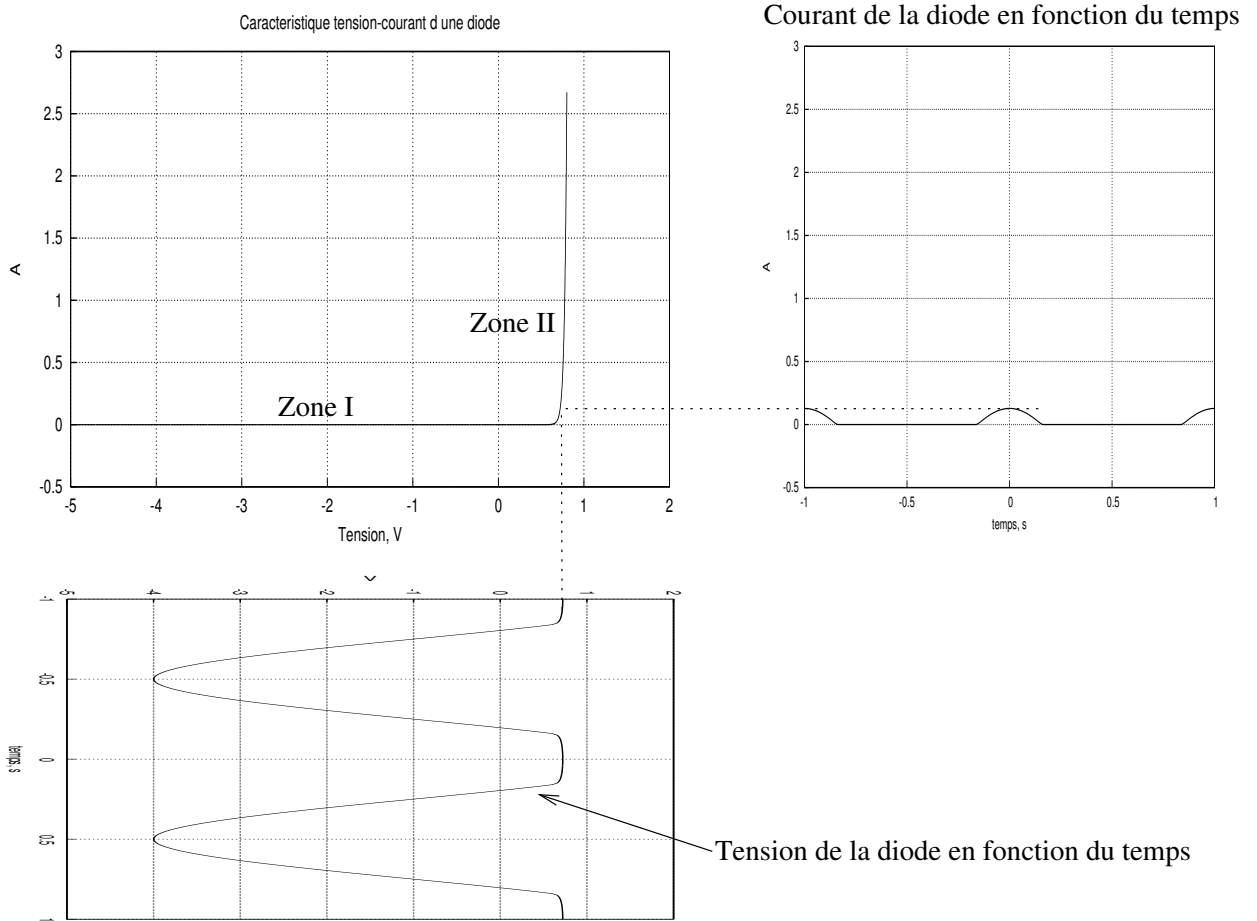


FIG. 9 – Évolutions temporelles du courant et de la tension sur la diode en régime grand signal.

de tension générant une tension constante $V_D = 0.7V$: le courant dans la diode est alors défini par la résistance et vaut :

$$i_D(t) = \frac{E_0 + e(t) - V_D}{R}. \quad (13)$$

Pour obtenir ces courbes, on aurait pu utiliser la méthode présentée dans le paragraphe 2.2, seulement, il aurait fallu l'appliquer pour chaque instant t , car la tension du circuit change. Toutefois, *pour les circuits plus complexes, avec des caractéristiques non-linéaires se prêtant moins bien à une linéarisation, seules les méthodes numériques donne les lois d'évolution des tensions et des courants en régime de grand signal.*

Le régime de grand signal est très fréquemment utilisé, en particulier dans l'électronique numérique et dans l'électronique de puissance. La fonction de transfert d'une porte logique (la tension de sortie en fonction de la tension d'entrée) est un exemple typique d'une fonction de transfert fortement non-linéaire. Cette fonction de transfert manifeste deux zones linéaires (figure 10). Dans chacune des zones, la porte peut être représentée comme une source de tension continue – nulle ou U_{dd} – tant que la tension d'entrée reste entre 0 et U_{th} ou entre U_{th} et U_{dd} . En revanche, la forme d'onde de la tension de sortie devient très complexe si, lors de son évolution temporelle, la tension d'entrée traverse le seuil.

3.2 Régime de petit signal

Un circuit fonctionne en régime de petit signal si sont vérifiées les conditions suivantes :

1. Les éléments non-linéaires ne changent pas de zone de fonctionnement. Cette condition impose une limite à la plage de variation de la grandeur d'entrée, car celle-ci doit permettre aux éléments de rester à l'intérieur d'une zone. Ainsi, s'il s'agit de la diode, elle doit être soit passante, soit bloquée pour tout t .
2. Le tronçon de caractéristique courant-tension correspondant à l'intervalle de fonctionnement diffère peu d'une droite, *i.e. présente une faible non-linéarité.*

Reprenons l'exemple du circuit contenant une diode (figure 8). Soit $E_0 = 3V$, $E_1 = 1V$, $R = 10\Omega$.

Sous ces conditions la tension sur la diode évolue entre 0.720 V et 0.745 V, le courant évolue entre 0.12 A et 0.32 A. La zone dans laquelle fonctionne la diode est donc limitée par ces deux points ; comme l'on voit d'après la

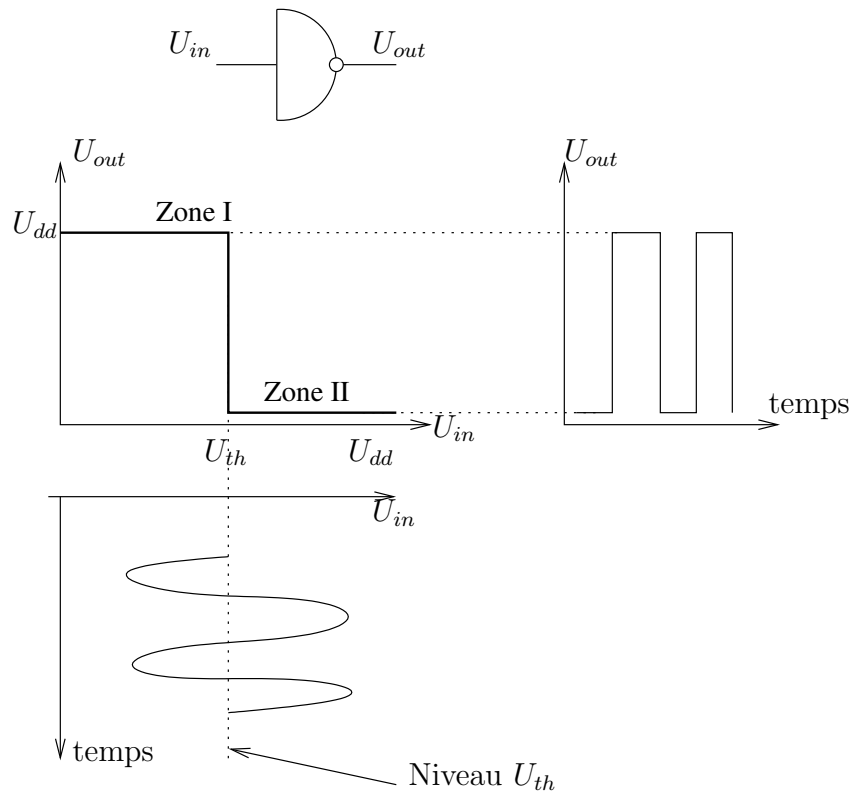


FIG. 10 – Fonction de transfert statique d'une porte logique.

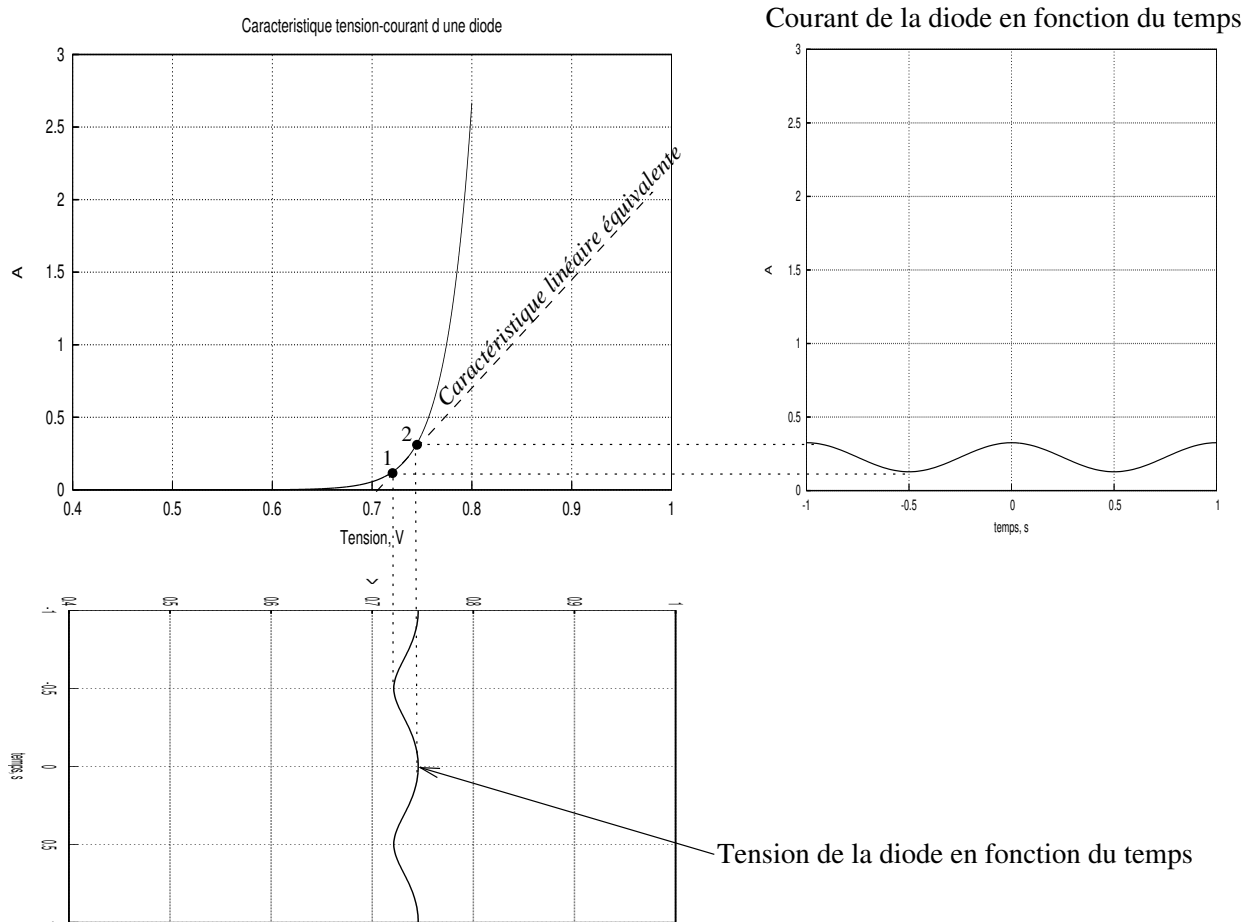


FIG. 11 – Tension et courant d'une diode fonctionnant en régime de petit signal.

figure 11, entre les points 1 et 2 la caractéristique est proche de la droite montrée en pointillé. Ainsi, pour analyser le circuit, on peut approximer la caractéristique courant-tension de la diode par cette droite. Comme on l'a déjà vu, une droite définit une source de tension ou de courant réelle. *Cette source de tension ou de courant s'appelle « modèle linéaire » ou « linéarisé » de la diode.*

On voit que plus l'amplitude de la composante alternative du signal est petite, plus l'approximation par une droite correspond à la réalité. *Un modèle linéaire est parfaitement précis si l'amplitude de la composante variable est infiniment petite.* En pratique, l'amplitude de la composante variable doit être assez petite, de sorte à ce que l'erreur induite soit tolérable. L'appréciation de ce qui est tolérable est bien sûr subjectif; tout dépend de la précision de l'analyse requise par le contexte.

D'après la figure 11 on voit que si l'amplitude du signal est faible, le rapport entre le courant et la tension est linéaire. On le constate car les formes d'onde de la tension et du courant sont les mêmes – sinusoïdales superposées à une constante, *i.e.* il n'y a pas de distorsion de la forme d'onde de la tension d'entrée ($e(t) + E_0$). Autrement dit, en régime de petit signal un élément non-linéaire effectue un traitement quasi linéaire. On peut se poser la question : pourquoi utiliser un élément non-linéaire pour effectuer un traitement linéaire ?

Pour y répondre, étudions l'influence des sources de tension E_0 et $E_1 \cos \omega t$ sur le régime de fonctionnement du circuit. Il est évident, que si $E_1 \rightarrow 0$, le régime de fonctionnement ne change pas; le modèle linéaire équivalent reste le même. Il en va de même si E_1 augmente : la plage de variation de la tension et du courant sur la diode s'élargit, mais ceci se traduit juste par un écartement des points 1 et 2 limitant la zone de fonctionnement; les paramètres du modèle restent à peu près les mêmes.

En revanche, si l'on modifie la tension continue E_0 , la zone de fonctionnement se déplace le long de la caractéristique courant-tension; la droite approximant la caractéristique change ses paramètres en imposant un nouveau modèle linéaire. Par exemple, si $E_0 = 15V$, la zone de fonctionnement se déplace vers la droite (figure 12). On voit que la droite approximant le tronçon de la caractéristique courant-tension n'est plus la même, ainsi, la diode est équivalente à une source réelle (de tension ou de courant) différente de celle du circuit de la figure 12.

Si l'on diminue la tension E_0 , on fait déplacer la zone de fonctionnement vers la gauche, et si cette tension est négative, on peut positionner la zone de fonctionnement vers le domaine de la caractéristique correspondant à la diode bloquée. Dans ce cas la diode sera équivalente à un circuit ouvert – source de tension avec une tension nulle et une résistance série infinie.

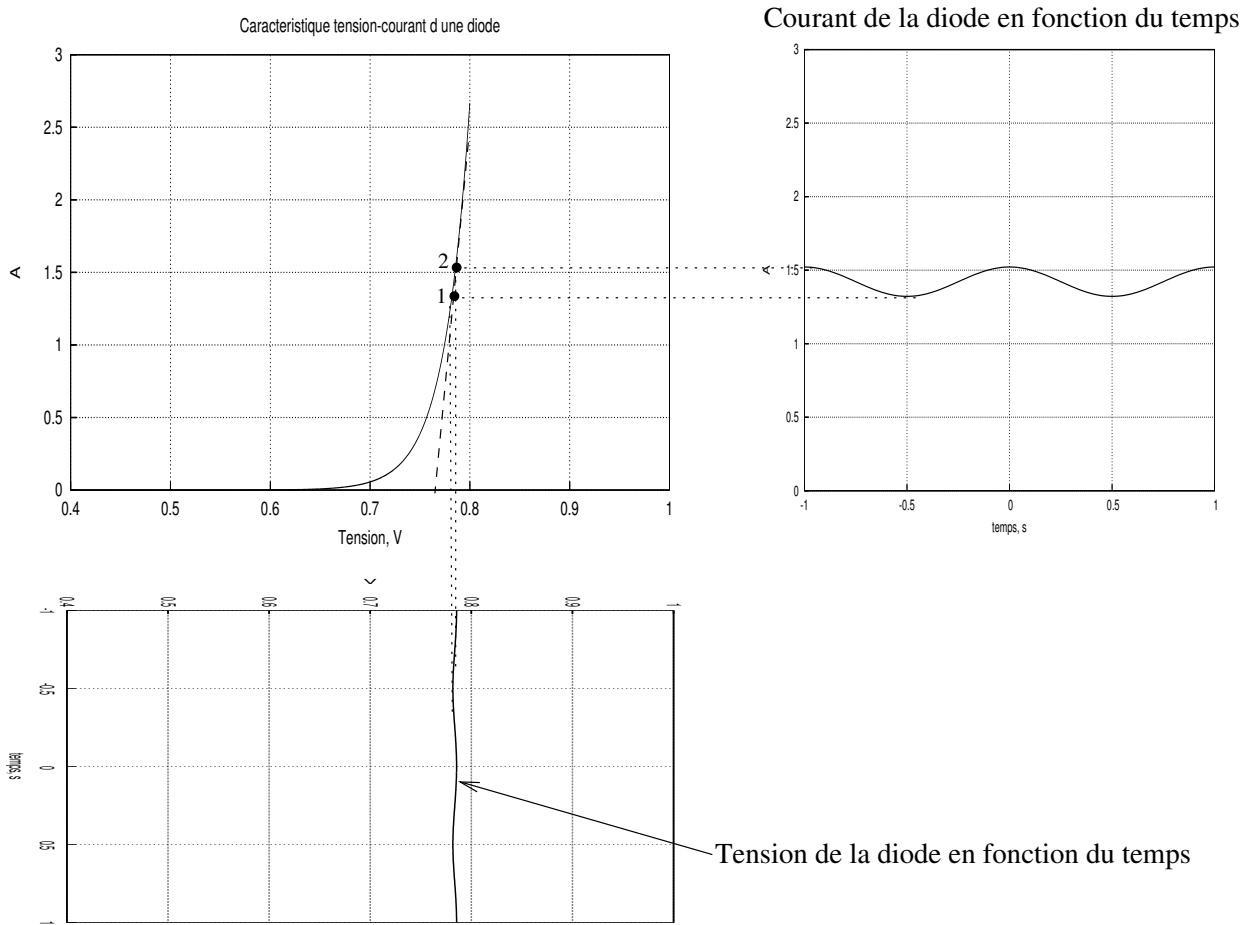


FIG. 12 – Régime de fonctionnement de la diode pour $E_0 = 15V$, $E_1 = 1V$.

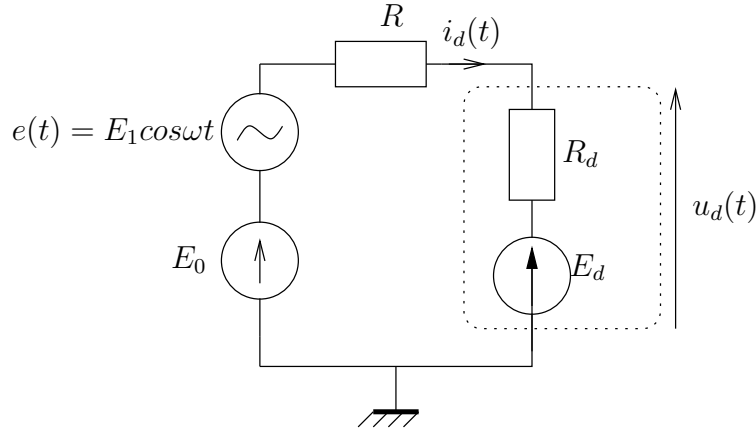


FIG. 13 – Modèle linéaire d'une diode.

Ainsi, la tension constante E_0 contrôle le régime dans lequel fonctionne la diode, et donc contrôle des paramètres de son modèle linéaire. Les éléments non-linéaires offrent donc une fonctionnalité extrêmement puissante : un contrôle *électrique*, *i.e.* par une tension ou par un courant, des paramètres du circuit linéaire équivalent.

L'avantage devient plus évident si l'on considère que le circuit de la figure 8 traite, d'une certaine manière, le signal $e(t)$, et si, dans la tension ou dans le courant de sortie, l'on ne s'intéresse qu'à la réponse à ce signal, *i.e.* uniquement au signal de sortie.

Redessignons le circuit de la figure 8 en utilisant le modèle linéaire de la diode (figure 13).

C'est un circuit linéaire, ainsi, le principe de superposition y est alors applicable. Par conséquent, tous les tensions et les courants du circuits sont des sommes des contributions des sources de tension continue E_0 , E_d et de la source sinusoïdale $e(t)$. Ainsi, les tensions et les courants ont la forme :

$$\eta(t) = \Xi + \xi \cos \omega t, \quad (14)$$

où Ξ et ξ sont la composante continue et l'amplitude de la composante sinusoïdale de la grandeur considérée (nommée η). On dit que Ξ est la composante *statique* de la grandeur η , alors que $\xi \cos \omega t$ est sa composante petit signal.

D'après le principe de superposition, la composante continue Ξ_0 dépend des sources continues E_0 et E_d , alors que la composante alternative dépend de la source de tension $e(t)$.

Ainsi, si l'on s'intéresse uniquement à la composante alternative de la grandeur de sortie, *i.e.* au *signal* de sortie, on peut annuler les sources conti-

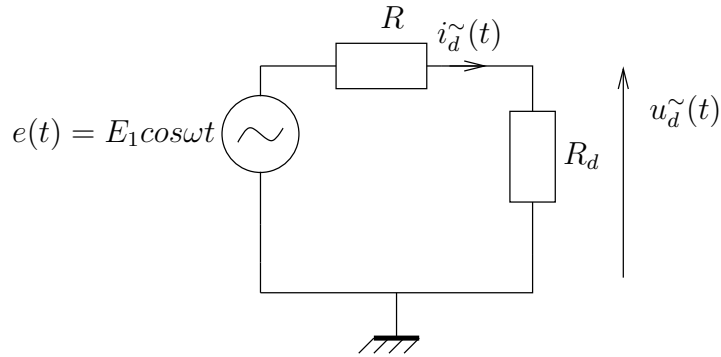


FIG. 14 – Schéma équivalent petit signal du circuit de la figure 14.

nues et ne considérer que les éléments ayant une contribution dans cette composante (figure 14). En éteignant *toutes les sources continues indépendantes* on obtient ce que l'on appelle « schéma équivalent petit signal » (figure 14) du circuit de la figure 8. La résistance R_d est alors le modèle petit signal de la diode.

La résistance R_d est un paramètre de modèle et dépend de la tension continue E_0 que appliquée à l'entrée. Ainsi, cette tension contrôle directement une résistance du schéma équivalent petit signal : donc, il est possible d'effectuer une multitude de traitements avec le même circuit en faisant juste varier E_0 .

3.3 Analyse d'un circuit non-linéaire en régime de petit signal

Dans le paragraphe précédent nous avons présenté l'idée et l'intérêt de la modélisation petit signal d'un élément non-linéaire. Ici, nous présentons les démarches à suivre pour analyser un circuit non-linéaire en régime de petit signal.

Tout d'abord introduisons quelques définitions.

Dans un circuit non-linéaire modélisé par son schéma linéaire équivalent (comme celui de la figure 13) et soumis à une tension ou un courant de type (11), les tensions et les courants évoluent selon la loi donnée par l'équation (14). D'après le principe de superposition, le régime sinusoïdal ne dépend pas du régime courant continu ; ainsi, pour l'analyse du régime sinusoïdal (harmonique) il convient d'utiliser la méthode des amplitudes complexes.

Ainsi, toute grandeur du circuit est caractérisée par sa composante continue désignée par une lettre majuscule (par exemple, I_1) et par l'amplitude complexe de la composante harmonique désignée par une lettre minuscule

(par exemple, i_1). D'habitude on ne met pas un point au-dessus du symbole, comme l'on a fait en introduisant la méthode des amplitudes complexes. Dans la littérature anglo-saxonne la composante continue s'appelle *DC component*, comme *direct current*, et la composante alternative *AC component*, comme *alternative current*.

Les valeurs DC (*i.e.* la composante continue) de la tension et du courant de l'élément non-linéaire s'appellent « *point de fonctionnement* », car elles définissent le point sur la caractéristique courant-tension qui est au centre de la zone dans laquelle fonctionne l'élément et, puisque idéalement les variations des tensions et des courants du circuit sont faibles, l'état de l'élément non-linéaire s'écarte peu de ce point. Pour désigner le point de fonctionnement on emploie les termes « point de polarisation », « point de repos », « tension/un courant de polarisation/de repos » et, en littérature anglo-saxonne, « *bias point* », « *operating point* » et « *bias voltage/bias current* ».

Définissons maintenant les paramètres du modèle équivalent petit signal d'un élément non-linéaire. Considérons les graphiques de la figure 11. Comme nous l'avons dit, le modèle devient parfaitement précis si l'amplitude de la composante alternative de la tension (ou de courant) tend vers zéro. Ainsi, la droite tend vers la tangente au point de fonctionnement (U_0, I_0) , où U_0 et I_0 sont les composantes continues du courant et de la tension de l'élément non-linéaire. Sur cette droite nous connaissons les coordonnées d'un point (U_0, I_0) et la pente $\left. \frac{dI(U)}{dU} \right|_{U=U_0}$, ainsi son équation est donnée par :

$$\frac{I(U) - I_0}{U - U_0} = \left. \frac{dI(U)}{dU} \right|_{U=U_0}, \quad (15)$$

ou autrement,

$$I(U) = \left. \frac{dI(U)}{dU} \right|_{U=U_0} \cdot U - \left. \frac{dI(U)}{dU} \right|_{U=U_0} \cdot U_0 + I_0. \quad (16)$$

On sait que cette droite modélise une source réelle contenant une résistance interne égale à l'inverse de la pente de la droite et une source de tension continue³. Or, cette dernière source ne contribue pas aux composantes petit signal des grandeurs du circuit, ainsi, lors de l'analyse petit signal on l'éteint.

le modèle équivalent petit signal d'un dipôle non-linéaire est une résistance égale à l'inverse de la pente de la caractéristique courant-tension au point de fonctionnement.

³Donnez la valeur de la tension de cette source à partir de l'équation (16).

Cette résistance, calculée selon la formule

$$r = \left(\frac{dI(U)}{dU} \Big|_{U=U_0} \right)^{-1} = \frac{dU(I)}{dI} \Big|_{I=I_0}, \quad (17)$$

s'appelle *résistance dynamique* de l'élément non-linéaire au point (U_0, I_0) . Cette résistance montre le rapport entre les faibles variations de la tension et du courant sur un dipôle non-linéaire. C'est un paramètre qui montre comment l'élément non-linéaire réagit à un signal, *i.e.* à une tension ou à un courant variable.

Ainsi, on peut construire le modèle petit signal d'un dipôle non-linéaire si l'on connaît le point de fonctionnement. Le point de fonctionnement est défini par les sources continues indépendantes faisant partie du circuit. Pour le circuit de la figure 8, c'est la source E_0 .

Pour trouver le point de fonctionnement, i.e. les composantes continues des tensions et des courants des éléments non-linéaires fonctionnant en régime de petit signal, on éteint toutes les sources alternatives et on cherche l'état des éléments non-linéaires en régime de courant continu. Pour cela on emploie n'importe quelle méthode d'analyse de circuits non-linéaires de courant continu, par exemple, celle d'approximation linéaire par morceaux ou une méthode numérique.

Donc, il est très important de comprendre, que pour pouvoir modéliser un circuit non-linéaire en régime de petit signal, il faut connaître son point de polarisation. Le plus souvent, cela nécessite un emploi des méthodes numériques, bien que dans certains cas (que nous allons étudier plus tard) un peu de bon sens suffit pour calculer le point de polarisation « à la main ».

3.4 Paramètres petit signal d'une diode passante

Soit (U_D, I_D) le point de fonctionnement d'une diode. Calculons sa résistance dynamique.

$$r_D = \left(\frac{dI_D(U_D)}{dU_D} \right)^{-1} = \left(\frac{q}{kT} I_S (e^{\frac{q}{kT} U_D}) \right)^{-1}, \quad (18)$$

Si la diode est passante, $e^{\frac{q}{kT} U_D} \gg 1$, ainsi

$$I_D \approx I_S e^{\frac{q}{kT} U_D}. \quad (19)$$

Donc, la résistance dynamique d'une diode passante vaut :

$$r_D = \left(\frac{dI_D(U_D)}{dU_D} \right)^{-1} = \left(\frac{q}{kT} I_S \left(e^{\frac{q}{kT} U_D} \right) \right)^{-1} = \frac{1}{I_D} \frac{kT}{q}, \quad (20)$$

Calculons la résistance dynamique de la diode dans le schéma de la figure 8, si $E_0 = 10V$ et $R = 1k\Omega$. Manifestement, la diode est passante (on peut le vérifier en faisant des hypothèses quant à la zone de fonctionnement). On sait que lorsque la diode est passante, la tension U_D diffère peu de $0.7V$. Ainsi, on peut supposer que $U_D \approx 0.7V$, donc la tension de la résistance est égale à $U_R = E_0 - U_D \approx 9.3V$. Par conséquent, le courant du circuit (donc dans la diode) vaut $I_D = U_R/R \approx 9.3/1000 = 9.3mA$. Ainsi, la résistance dynamique de la diode est donnée par :

$$r_D = \frac{1}{9.3 \cdot 10^{-3}} \frac{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{1.6 \cdot 10^{-19}} = 2.78\Omega. \quad (21)$$

Une méthode numérique donne pour le point de fonctionnement $I_D = 9.34mA$ et $U_D = 0.653V$, la résistance dynamique de la diode vaut 2.767Ω .

Ainsi, l'hypothèse que la tension de la diode en état passant est constante facilite le calcul du point de fonctionnement et donne des résultats très précis.