Oscillateur en anneau : lien entre oscillateur en anneau, oscillateur LC et la théorie des oscillateurs

Dimitri Galayko

1 Introduction

Le but de ce document est de montrer comment on peut faire évoluer un oscillateur LC passif élémentaire en un oscillateur en anneau ne contenant pas d'inductances. Cet exercice intellectuel a pour but de montrer l'unicité de la théorie des oscillateurs, qui est très souvent occultée dans les manuel scolaires. En effet, les oscillateurs à base de résonateurs LC sont analysés en tant que réseaux électriques, alors que les oscillateurs en anneau sont analysés comme des systèmes bouclés : ces deux représentations se trouvent aux niveaux d'abstraction différents, et il est difficile de voir le lien direct entre les deux. Ce document comble cette lacune...

2 Oscillateurs LC

Un oscillateur linéaire est un système dynamique linéaire possèdant une paire de pôles purement imaginaires, i.e., parmis n pôles du système, il existe k, m tel que :

$$p_k = p_m^* = j\omega, \tag{1}$$

où j est l'unité complexe, $*$ signifie l'opération de conjugaison complexe.

Il est impossible d'obtenir des oscillations stables dans un système linéaire, car ça reviendrait à garantir la valeur de la partie réel des pôles p_k et p_m à zéro, i.e., avec une précision infinie. Ainsi, en pratique, les oscillateurs sont toujours des systèmes non-linéaires, dont les valeurs de pôles dépendent de l'amplitude. Ainsi, au repos (point stable de type "focus"), il existe une paire de pôles conjugués-complexes avec parties réelles positives : ainsi, dans la réponse transitoire il y a un terme (additif) de type $A_0 e^{\alpha t} \sin \omega t$, où α est la partie réelle du pôle, $\alpha > 0$, A_0 est une constante positive dépendante des conditions initiales. De cette manière, une moindre perturbation (bruit...) conduit à un accroissement exponentiel de l'amplitude d'oscillations. Au fur et à mesure que l'amplitude augmente, la partie réelle de la paire de pôle augmente jusqu'à devenir nulle : c'est l'amplitude "nominale" d'oscillations. Si jamais l'amplitude augmente davantage, la partie réelle de la paire des pôles devient négative, faisant diminuer l'amplitude. Sur ce principe fonctionnent la plupart des oscillateurs.

Ainsi, pour étudier les phénomènes oscillatoires dans un système, il faut calculer ses pôles. Les pôles d'un réseau électrique se calculent de la manière suivante. On "coupe" un fil du circuit, et on calcule l'expression pour l'impédance vue sur le dipôle obtenu, en utilisant le formalisme de Laplace. On résout ensuite l'équation $Z(p) = 0$: les racines de cette équation sont des pôles du système. Pour les sytèmes de type "fonction de transfert" (qui, sctrictement dit, ne sont pas des circuits électriques mais des systèmes "abstraits"), les pôles sont les racines du polynôme correspondant au dénonminateur de la fonction (on suppose que cette dernière est rationnelle...). Si on souhaite caluculer les pôles d'un circuit en utilisant la représentation via la fonction de transfert, il est nécessaire d'insérer dans le circuit une source d'entrée (tension ou courant). On peut démontrer que pour un circuit électrique donné, les pôles sont des paramètres intrinsèque du circuit, quel que soit la méthode que l'on a utilisé pour le calcul (le fil que l'on a coupé, la fonction de transfert que l'on a choisie à calculer,

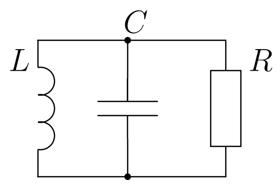

FIG. 1 –

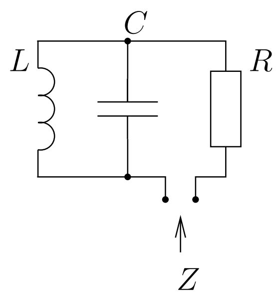

FIG. 2 –

etc.).

Pour un circuit LCR parallèle (fig. 1), les pôles sont obtenus en coupant le circuit (fig. 2 et en mettant l'impédance du circuit à zéro :

$$Z(p) = R + pL || \frac{1}{pC} = 0, \tag{2}$$

et on obtient :

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2CR} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2CR}\right)^2} \tag{3}$$

(On suppose, bien sûr, que le système est faiblement amorti et que l'expression sous la racine est positive).

Il est évident, que si l'on souhaite que ce système soit oscillatoire, il faut compenser les pertes dans la résistance, en y introduisant une résistance négative. Cela peut être fait à l'aide d'un circuit actif appelé transconductance (fig. 3) : c'est un circuit qui génère un courant *sortant* du terminal de sortie proportionnel à la tension à l'entrée, avec facteur g. Ainsi, en mettant la transconductance en parallèle avec la résistance R (5), la résistance totale vaut $\dfrac{Rg^{-1}}{g^{-1} - R}$,

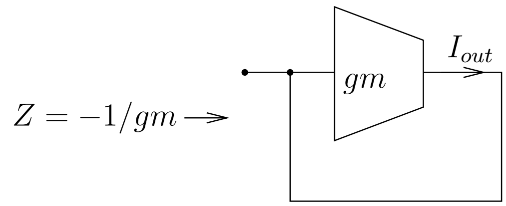

FIG. 3 –

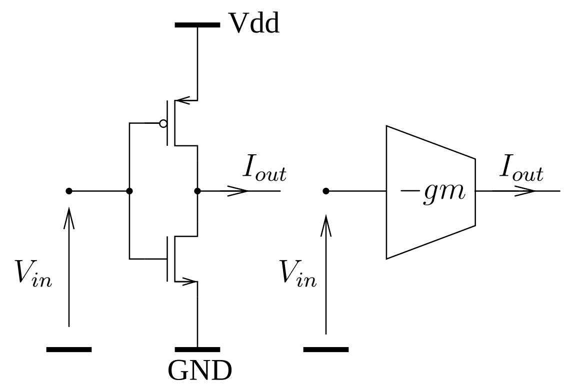

FIG. 4 – Inverseur CMOS comme transconductance qui vaut $-gm_p - gm_n$

et si $g = R$, la résistance totale est infinie et le réseau oscille. Une transconductance positive peut être obtenue en mettant en cascade deux inverseurs MOS, chacun réalisant une transconductance négative (fig. 4). Le nouveau schéma est donné fig. 5. La mise en oeuvre d'un oscillateur à l'aide de cette structure est presque immédiate, mais il y a quelques particularités dont il s'agira dans le chapitre applicatif.

Cependant, si on souhate réaliser un oscillateur

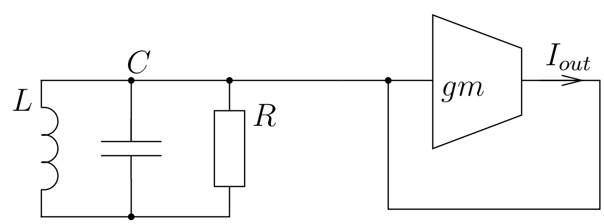

FIG. 5 –

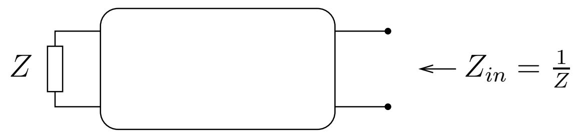

FIG. 6 –

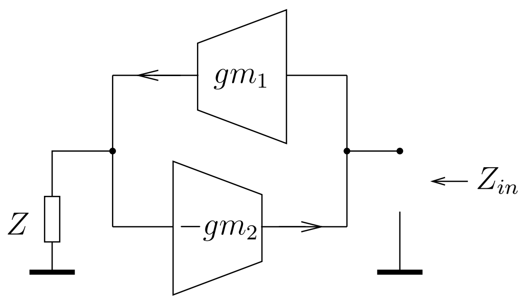

FIG. 7 –

MOS, il serait intéressant de se débarasser de l'inductance. On peut le faire en utilisant un girateur, i.e., un quadripôle permettant d'inverser l'impédance. Le schéma est donné fig. 6.

Ainsi, pour réalisér une inductance, il suffit d'associer une capacité et un girateur.

En pratique, un girateur est réalisé à l'aide de deux transconductances, une positive et l'autre négative (fig. 7). Il est facile de voir que l'impédance vue sur les terminaux de droite vaut :

$$Zin = \frac{1}{gm_1 gm_2 Z} \tag{4}$$

Ainsi, si $Z = 1/(pC)$, on obtient une inductance de valeur $C/(g_1 g_2)$.

En associant une transconductance réalisant une résistance négative, un girateur, deux condensateurs et une résistance passive, on obtient un réseau pouvant osciller si la résistance négative compense les pertes dans la résistance passive. Le circuit peut être réalisé avec uniquement des transistors MOS.

En pratique, les choses sont plus simples et plus compliquées à la fois. Les choses sont plus compliquée car pour réaliser une transconductance, on utilise un transistor MOS, qui apporte une conductance de sortie (g_o) et la capacité parasite en sortie C_o, si bien

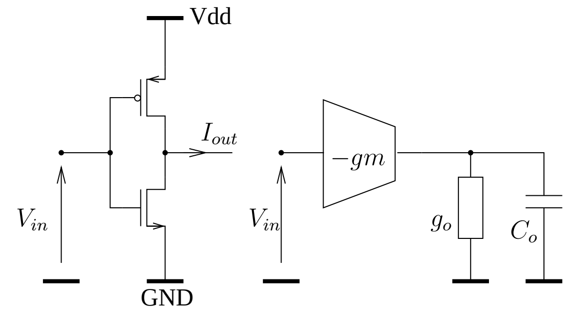

FIG. 8 –

qu'en pratique on a toujours une transrésistance associée avec sa charge $g_o C_o$ intrinsèque (fig. 8). C'est donc avec ces éléments-là que nous devons réaliser nos transconductances. La bonne nouvelle est, qu'un girateur sensé réaliser une simple inductance, réalise, en réalité, une inductance associée à une résistance négative série. Comme montrent les calculs, cela nous débarasse de la nécessité d'introduire exprès une résistance négative parallèle à l'aide d'une transconductance.

Analysons un girateur formé de trois inverseurs MOS identiques (fig. 9) : l'une est utilisée pour réaliser la trasconductance négative, les deux autres, pour réaliser l'inductance positive. On n'a pas besoin de mettre exprès une capacité sur les terminaux de gauche du girateur : la capacité intrinsèque des transconductances est présente par défaut. Chaque inverseur est donc caractérisé par sa transconductance g_m, sa conductance g_o et sa capacité C_o. Nous avons mis à part les éléments C_o et g_o de la transconductance connectée par sa sortie au terminal de droite, car ils ne participent pas à la fonction du girateur (on les prendra en compte plus tard).

Il est facile de voir que l'impédance Z_1 vue sur le terminal droit du girateur vaut :

$$Z_1 = \frac{1}{g_m^3}(g_o + pC_o)^2. \tag{5}$$

Si $p = j\omega$, on a :

$$Z_1 = \frac{1}{g_m^3}(g_o^2 - \omega^2 C_o^2 + 2\omega C_o g_o j). \tag{6}$$

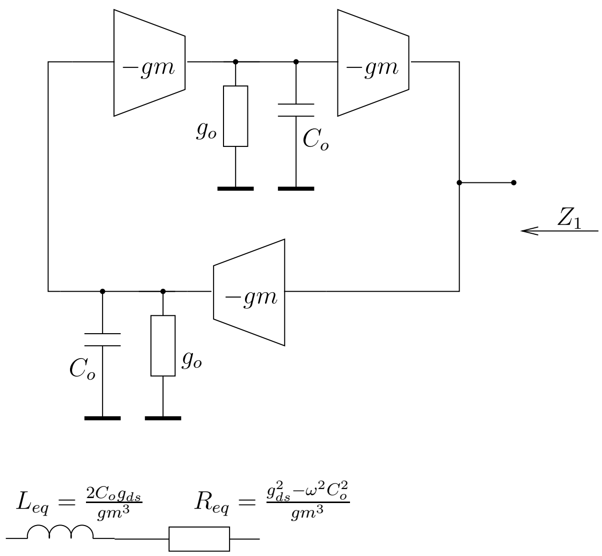

FIG. 9 –

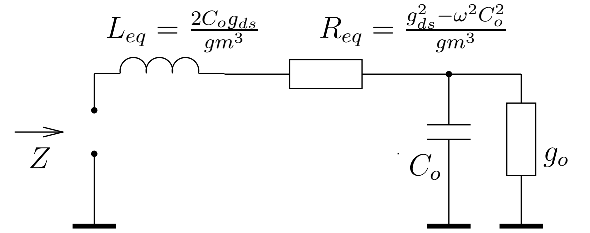

FIG. 10 –

On voit que la partie réelle de l'impédance devient négative pour les hautes fréquences. Cela correspond à une résistance négative : ainsi, il devient toujours possible de compenser les éventuelles pertes du circuit connecté aux terminaux de droite du girateur. Le circuit équivalent est alors donné fig. 9.

Maintenant, pour achever la construction de l'oscillateur en anneau, il suffit de prendre en compte le fait que nous avons une capacité et une résistance associée à la sortie de la transconductance connectée aux terminaux de droite. On remplace nos éléments C et R par les éléments g_o et C_o. On obtient un circuit équivalent donné fig. 10. Maintenant, il suffit de calculer les pôles de ce circuit pour trouver les fréquences d'oscillations et la condition de la mise en oscillation. On a pour l'impédance totale :

$$Z = \frac{1}{g_m^3}(g_o + pC_o)^2 + \frac{1}{g_o + pC_o} = 0. \tag{7}$$

Cette équation est de troisième ordre, mais elle a une solution analytique évidente si on utilise la formule de factorisation de binome de cubes

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2). \tag{8}$$

Nous avons :

$$p_{1,2} = \frac{gm - 2g_o}{2C_o} \pm \frac{\sqrt{3}gm}{2C_o} j \tag{9}$$

$$p_3 = -\frac{g_o + gm}{C_o}. \tag{10}$$

Nous avons trois racines, dont une réelle (toujours le cas pour une équation de 3ème ordre avec coefficients réels). La troisième racine ne nous intéresse pas car n'est pas associée aux phénomènes oscillatoires. En revanche, les deux premières racines donnent la fréquence de démarrage d'oscillation et la condition de mise en oscillation. Les oscillation naissent si la partie réelle est négative, i.e., si $gm/g_o \geq 2$, et la fréquence d'oscillation vaut

$$\omega_{osc} = \frac{\sqrt{3}gm}{2C_o}. \tag{11}$$

Ce résultat, obtenu par analyse rigoureuse, a été validé par simulation Spice (cf. netlist ci-dessous). La modélisation a utilisé les transconductances linéaires, justement pour représenter les condition de démarrage d'oscillations. Pour $gm = 1\Omega^{-1}$, $g_o = 0.1\Omega^{-1}$ et $C_o = 1nF$, on obtient les oscillations divergeant avec période de 72.3 ns, ce qui correpsond presque exactement à la valeur prédite par la formule (11).

```
* oscillator

.SUBCKT INV in out
*linear VCCS (transconductance)
G1 out 0 in 0 1
```

```
Co out 0 1n
ro out 0 10
.ENDS INV

X1 A1 A2 INV
X2 A2 A3 INV
X3 A3 A1 INV

*nécessaire pour l'initilaisation
*de l'oscillateur
Iinit A1 0 1e-3


.dc
.tran 0.1e-9 1e-7  uic
.PLOT TRAN V(A1) V(A2) V(A3)
.end
```

Il est cependant intéressant de comparer notre analyse avec celle de Razavi. En appliquant le critère de Barkousen, il obtient la fréquence à laquelle le déphasage de la chaîne en boucle ouverte est de 180°, puis, pour cette fréquence il calcule la condition pour que le gain de boucle est égale à 1. Il obtient la même condition de mise en oscillation (ouf...), mais la fréquence de déphasage de 180° $\omega_o sc$ vaut :

$$\omega'_{osc} = \frac{\sqrt{3}g_o}{C_o}. \qquad (12)$$

Razavi appelle cette fréquence "la fréquence d'oscillations *stables*, i.e., la fréquence à laquelle l'oscillateur oscille si les pertes sont tout juste compensées. Rapporté à notre analyse, cela correpsond à la fréquence pour la valeur minimale que doit avoir gm, i.e., de $2g_o$ pour annuler la partie réelle des pôles complexes. En effet, si $gm = 2g_o$, les equations (12) et (11) donnent le même résultat.

En réalité, $\omega_{osc'}$ n'est pas du tout la fréquence à laquelle les oscillations démarrent ! Pour obtenir cette dernière, Razavi fait l'analyse de l'oscillateur en anneau, en recherchant la position des pôles en boucle fermée. Pour obtenir les pôles, il recherche d'abord la fonction de transfert en boucle ouverte, ensuite utilise l'expression pour le gain en boucle fermée, et considère le dénominateur de la fonction de transfert pour déduire les pôles du système. L'expression obtenue pour la fréquence de démarrage est bien (11), qui se transforme en (12) pour $gm = 2g_o$.

Cet exemple montre les deux manières de rechercher les pôles d'un circuit électrique : en considérant l'impédance totale du circuit, ou bien la fonction de transfert. Bien sûr, les deux méthodes donnent les mêmes résultats.

3 Applications : exercices TD

1. Comment, en s'inspirant du schéma de principe de la fig. 5 réalise-t-on un oscillateur à partir de deux transconductances CMOS (inverseurs), une inductance non-idéale et une capacité ? Une suggestion est donnée par le schéma de la fig. 11, et son analyse est le but de l'exercice. On connait la valeur de l'inductance L, sa résistance série r_L, la valeur de la capacité.

– Pourquoi le montage de la fig. 5 nécessite un réseau LC parallèle et non série ?

– Comment et pourquoi faut-il polariser le circuit (la polarisation n'est pas montrée ! le circuit assemblé tel quel ne fonctionnera pas...) ?

– Pour les valeurs ci-dessous, calculez les dimensions des transistors P et N en technologie CMOS035, en utilisant le modèle quadratique. Vous négligérez les capacités intrinsèques des transistors (car elles sont bien plus faibles que C) et la conductance de sortie g_{ds} de l'étage connecté au résonateur.

2. Proposez un montage permettant de générer la polarisation.

3. Pour ne pas avoir besoin d'une source de polarisation, on utilise un montage différentiel. Ce n'est qu'une variation du schéma précédent : plutôt que de connecter le résonateur LC entre un terminal de la transconductance et la masse, on connecte entre les sorties des transconductances (les seuls noeuds autre que GND et Vdd présentent dans le circuit). La polarisation n'est plus nécessaire, cependant, pour assurer les oscillations, il faut recalculer les dimensions des transistors.

– pourquoi les dimensions de transistors calculées pour le cas précédent ne sont plus suffisantes pour mettre le système en oscillation ?

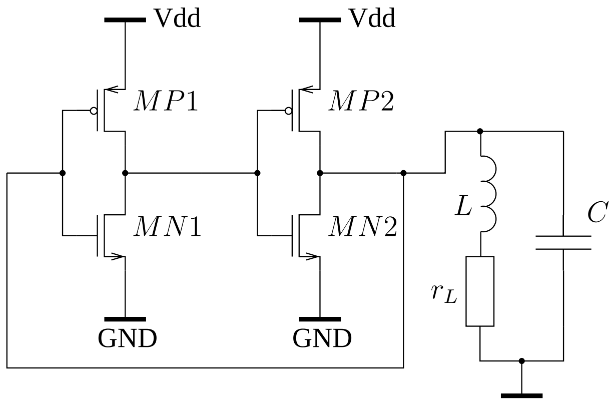

FIG. 11 –

– Donnez les nouvelles dimensions de transistors.
Valeurs numériques :
$L = 1nH$
$C = 10pF$
$r_L = 1\Omega$
Pour la technologie AMS035 :
$\mu_n = 4.035 \cdot 10^{-2} mV^{-1}s^{-1}$,
$\mu_p = 1.296 \cdot 10^{-2} mV^{-1}s^{-1}$,
$t_{ox} = 7.70e - 9m$
Paramètres technologiques :