

Eléments théoriques sur le bruit dans les circuits électroniques

Table des matières

1	Introduction	2
2	Modélisation analytique du bruit	2
2.1	Densité de probabilité	2
2.2	Stationnarité et ergodisme du bruit	3
2.3	Densité spectrale de puissance	4
2.3.1	Définitions	4
2.3.2	Théorème de Wiener-Khintchine	5
2.3.3	Densité spectrale d'une somme de signaux aléatoires	5
3	Les différentes sources de bruit	5
3.1	Le bruit thermique	5
3.2	Le bruit de grenaille	7
3.3	Le bruit additionnel en 1/f ou bruit de scintillation	7
3.4	Les autres sources de bruit	8
3.4.1	Le bruit de génération-recombinaison ou bruit GR	8
3.4.2	Le bruit d'avalanche	8
4	Le théorème de Nyquist et le théorème de bode	9
4.1	Le théorème de Nyquist	9
4.2	Le théorème de Bode	9
5	Principe de calcul de la d.s.p. de bruit dans un circuit	10
6	Bruit aux bornes d'une association de résistances bruyantes	11
7	Conditionnement du bruit par un système linéaire	12
7.1	Cas général	12
7.2	Conditionnement d'un bruit blanc	14
7.3	Bande équivalente de bruit	14
8	Représentation des quadripôles bruyants	15
8.1	Représentation à générateurs de tension et de courant	15
8.2	Représentation à générateurs de bruit ramenés à l'entrée	17
8.3	Prise en compte des corrélations entre les sources	17
8.4	Facteur de bruit d'un quadripôle	19
8.5	Mise en cascade de quadripôles bruyants	20
9	Le bruit dans le transistor bipolaire	21
9.1	Schéma équivalent physique pour le bruit	21
9.2	Schéma équivalent avec générateurs de bruit à l'entrée	22
9.3	Facteur de bruit et résistance de source optimale	23

10 Le bruit dans le transistor MOS	24
10.1 Schéma équivalent physique pour le bruit	24
10.2 Schéma équivalent avec générateurs de bruit à l'entrée	24
11 Le bruit dans l'amplificateur opérationnel	26
11.1 Modélisation du bruit	26
11.2 Influence de la contre réaction sur le bruit	26
12 Le bruit dans les circuits à capacités commutées	28
12.1 L'échantillonnage du bruit	28
12.2 L'échantillonnage d'un bruit blanc filtré par un passe-bas	29

1 Introduction

Tout dispositif électronique est le siège de fluctuations dues à un déplacement aléatoire de charges électriques. Ces fluctuations constituent pour le signal utile traité une limite basse ultime : le bruit de fond. L'influence du bruit sur les performances d'un circuit dépend de la fonction électronique réalisée. En détection, le bruit fixe la sensibilité du circuit, c'est à dire le seuil d'intelligibilité du signal. En amplification ou en filtrage, on considère que le fonctionnement n'est assuré correctement que si le niveau du signal utile excède de plusieurs ordres de grandeur le niveau de bruit (rapport signal à bruit supérieur à 60dB). Le bruit fixe en partie la dynamique d'un système électronique. En effet, tout dispositif actif génère intrinsèquement des distorsions de linéarité, et la dynamique d'un circuit est définie comme le rapport du plus grand signal qu'on peut traiter avant de générer un taux de distorsion harmonique inacceptable (typiquement 0,1 à 1%) sur le petit signal détectable. ... Il est donc important de connaître les origines du bruit et de savoir le décrire pour être en mesure de le prendre en compte lors de la conception des différents dispositifs électroniques.

2 Modélisation analytique du bruit

2.1 Densité de probabilité

Le bruit est un processus aléatoire pouvant être défini comme une famille de fonctions réelles ou complexes $x(t, \xi)$. Pour chaque événement ξ_i , le processus se réduit à un exemplaire de l'espace des épreuves, c'est un signal aléatoire noté $x_i(t) = x(t)$. A chaque instant t_i , le signal aléatoire $x(t)$ se réduit à une variable aléatoire $x(t_i)$ notée simplement x_i . Si x_i représente l'amplitude instantanée de valeur a d'une tension ou d'un courant de bruit, ce dernier peut être caractérisé par sa densité de probabilité monodimensionnelle

$$p(x) = \frac{\text{Prob.}(x < a \leq x + dx)}{dx}$$

et par sa répartition

$$P(x) = \int_{-\infty}^x dx = \text{Prob.}(a < v) \text{ telle que } P(\infty) = 1.$$

Parmi toutes les fonctions de densité de probabilité pouvant décrire le bruit dans les circuits électroniques, la densité gaussienne ou normale est la plus importante (*figure 1*). Elle est donnée par

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-0,5\left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x}\right)^2\right).$$

En effet, la genèse du bruit a souvent pour origine la superposition d'un grand nombre de phénomènes aléatoires indépendants et possédant la même loi de probabilité. Par le théorème de la limite centrale [6], la loi résultante tend asymptotiquement vers une loi normale. Le calcul effectué à partir de la répartition normale

$$P(x) = \Phi^*\left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x}\right) \text{ avec } \Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

montre que 99,7% des amplitudes instantanées sont comprises dans l'intervalle $\pm 3\sigma$.

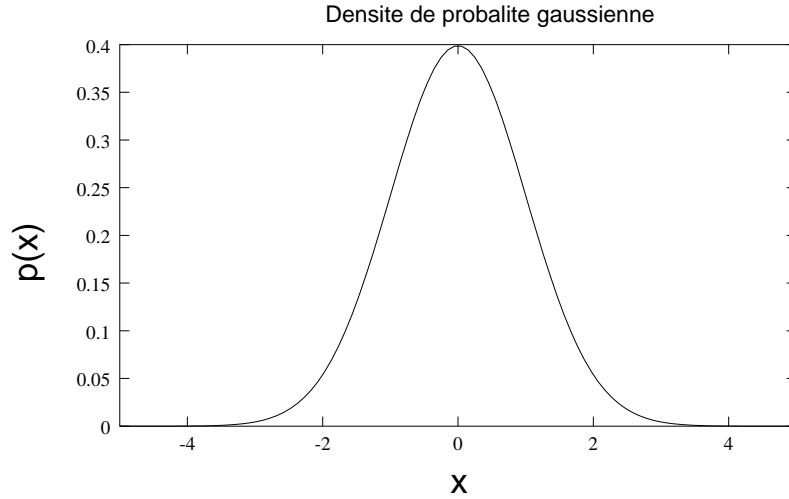


FIGURE 1 –

Densité de probabilité gaussienne avec $\mu_x = 0$ et $\sigma_x = 1$

2.2 Stationnarité et ergodisme du bruit

Pour obtenir des données statistiques sur le bruit dans un système, on peut effectuer une série de mesures sur le système sur une longue période. On observe que la densité de probabilité et les paramètres statistiques dérivés ne dépendent pas de l'instant d'observation, le bruit est donc un processus aléatoire stationnaire. Les données statistiques ainsi recueillies sont les mêmes que lorsqu'on effectue simultanément une série de mesures sur un grand nombre de systèmes identiques. Le bruit est donc un processus ergodique. En conséquence, pour le bruit, on peut identifier les valeurs moyennes temporelles de degré n et les moments statistiques de même degré [1] :

$$\bar{x}^n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)^n dt \longleftrightarrow E[x^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n p(x) dx$$

On obtient ainsi les principales équivalences

- valeur moyenne $\mu_x \longleftrightarrow$ composante continue \bar{x}
 $\int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx \longleftrightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) dt$
- valeur quadratique moyenne $E[x^2] \longleftrightarrow$ puissance moyenne totale \bar{x}^2
 $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx \longleftrightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)^2 dt$
- variance $E[(x - \mu_x)^2] = \sigma_x^2 \longleftrightarrow$ puissance des fluctuations Pf_x
 $\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 p(x) dx \longleftrightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} (x(t) - \bar{x})^2 dt$
- écart type $\sigma x \longleftrightarrow$ valeur efficace des fluctuations $\sqrt{Pf_x}$
- autocorrélation $Rx(\tau) = E[x(t) x(t + \tau)] \longleftrightarrow$ autocorrélation $Rx(\tau) = x(-\tau) x(\tau)$
 $\int \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2 : \tau) dx_1 dx_2 \longleftrightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} (x(t) x(t + \tau) dt$

2.3 Densité spectrale de puissance

2.3.1 Définitions

Soit une observation $b_i(t)$ d'un bruit $b(t)$ (figure 2) dans un intervalle $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$.

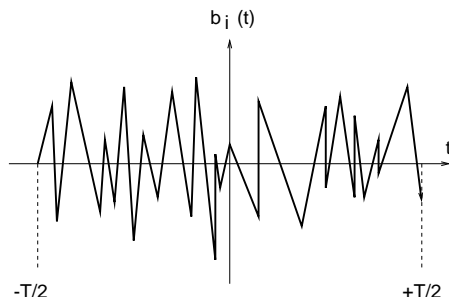


FIGURE 2 –

Observation $b_i(t)$ d'un bruit $b(t)$

Ce signal, nul à l'extérieur de l'intervalle d'observation, a pour transformée de Fourier

$$B_i(f, T) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} b_i(t) \exp(-j\omega t) dt.$$

La puissance moyenne du signal dans l'intervalle considéré étant donnée par

$$P_{B_i}(T) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |B_i(f, T)|^2 df,$$

on appelle périodogramme la grandeur aléatoire

$$S_{B_i}(f, T) = \frac{|B_i(f, T)|^2}{T}.$$

La densité spectrale de puissance $S(f)$ (d.s.p. sous forme abrégée) est déduite de l'espérance mathématique $S(f, T) = E[S_{B_i}(f, T)]$ puis par passage à la limite pour obtenir une résolution fréquentielle infinie

$$S(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} S(f, T) = \lim_{T \rightarrow \infty} E\left[\frac{|S_{B_i}(f, T)|^2}{T}\right].$$

C'est une caractéristique fréquentielle du bruit donnant la puissance moyenne du signal contenue dans une bande de fréquence infiniment petite. C'est une fonction paire définie dans l'intervalle $-\infty < f < +\infty$. Pour une tension, $S_v(f)$ s'exprime en V^2/Hz , et pour un courant, $S_i(f)$ s'exprime en A^2/Hz . Comme seules les fréquences positives ont un sens physique, on peut définir une densité spectrale unilatérale :

$$S^+(f) = 2 S(f) \text{ pour } 0 < f < +\infty.$$

2.3.2 Théorème de Wiener-Khintchine

La d.s.p. d'un processus aléatoire stationnaire est la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation [6]

$$Sx(f) = \mathcal{F}[Rx(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} Rx(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau.$$

$$Rx(\tau) = \mathcal{F}[Sx(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} Sx(f) \exp(+j\omega\tau) df.$$

2.3.3 Densité spectrale d'une somme de signaux aléatoires

Soit le signal aléatoire $Z(t) = K_1X(t) + K_2Y(t)$. Il a pour fonction de corrélation

$$Rz(\tau) = E[Z(t)Z(t+\tau)]$$

$$Rz(\tau) = E[(K_1X(t) + K_2Y(t))(K_1X(t+\tau) + K_2Y(t+\tau))]$$

$$Rz(\tau) = E[K_1^2X(t)X(t+\tau) + K_2^2Y(t)Y(t+\tau)]$$

$$+ K_1K_2E[X(t)Y(t+\tau)] + K_1K_2E[Y(t)X(t+\tau)]$$

$$Rz(\tau) = K_1^2Rx(\tau) + K_2^2Ry(\tau) + K_1K_2(Rxy(\tau) + Ryx(\tau)).$$

Il a pour densité spectrale

$$Sz(f) = K_1^2Sx(f) + K_2^2Sy(f) + K_1K_2(Sxy(f) + Syx(f)).$$

Si les signaux $X(t)$ et $Y(t)$ sont à valeur moyenne nulle et statistiquement indépendants, les densités interspectrales $Sxy(f) + Syx(f)$ sont nulles, et

$$Sz(f) = K_1^2Sx(f) + K_2^2Sy(f).$$

Bien entendu, ce résultat est généralisable à une somme d'un nombre quelconque de signaux aléatoires.

3 Les différentes sources de bruit

Plusieurs sources de bruit ont été identifiées dans les différents dispositifs électroniques [4] [9] [7].

3.1 Le bruit thermique

Le bruit thermique est lié à la vitesse thermique des porteurs de charge dans un conducteur. Il est associé à toute partie résistive d'un dispositif, la vitesse V_k d'un électron étant une variable aléatoire produisant aux bornes d'une résistance R une tension électrique U_k . Le comportement d'un électron est régi par un processus de Gauss-Markof avec une fonction d'autocorrélation temporelle

$$Rk(\tau) = \bar{U}_k^2 \exp(-|\tau|/\tau_c).$$

Le paramètre τ_c est le temps de collision moyen d'un électron et \bar{U}_k est la contribution de l'électron à la tension efficace \bar{U} . La d.s.p. est donc

$$Sk(f) = \bar{U}_k^2 \frac{2\tau_c}{1+(\omega\tau_c)^2}.$$

Le temps de collision τ_c est inférieur à $10^{-10}s$, et aux fréquences de travail usuelles ($\ll 1000GHz$) on montre que la d.s.p. de bruit thermique dans un circuit est une fonction universelle de la résistance R et de la température T telle que

$$Sv(f) = 2K_B T_K R.$$

La constante de Boltzmann est approximativement égale à $1,38 \cdot 10^{-23}$ et ainsi, à l'ambiante ($T_K = 290K$), le produit $K_B T_K$ a pour valeur $4 \cdot 10^{-21} J$. Le bruit thermique est un bruit blanc et sa répartition en amplitude est régie par une densité de probabilité normale. La valeur efficace de tension de bruit aux bornes d'une résistance R dans une bande de fréquence B s'écrit

$$\sigma v = \sqrt{\int_0^{+\infty} S_{v^+}(f) df} \approx 126,5 \sqrt{R B} \text{ pV } \text{ a l'ambiante.}$$

Il est la conséquence de la contribution désordonnée d'un très grand nombre de perturbations élémentaires. Sa distribution en amplitude (tension ou courant) est une gaussienne

$$p(u) = \frac{1}{\sigma u \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma u^2}\right).$$

Electriquement, on modélise le bruit thermique à partir d'une source de tension aléatoire de valeur efficace $\bar{v}_n = \sqrt{4K_B T_K R B}$ ou de densité spectrale $Sv(f) = 2K_B T_K R$ en série avec une résistance R non bruyante. La phase du générateur de tension étant aléatoire, il est parfaitement légitime de ne pas préciser de polarité pour le générateur. Par dualité Thévenin \longleftrightarrow Norton, avec $G = 1/R$ on peut obtenir l'équivalence générateur de courant de la figure 3, où $\bar{i}_n = \sqrt{4K_B T_K G B}$ et $Si(f) = 2K_B T_K G$.

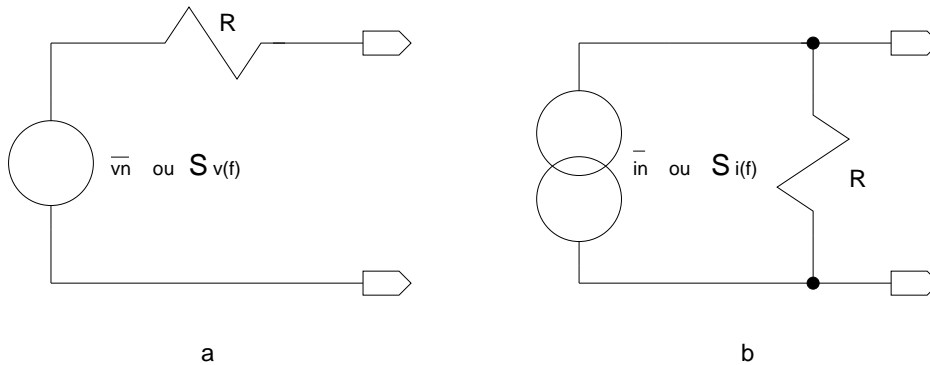


FIGURE 3 –

- a : Equivalence de Thévenin pour le bruit thermique avec $\bar{v}_n = \sqrt{4K_B T_K R B}$ et $Sv(f) = 2K_B T_K R$
b : Equivalence de Norton pour le bruit thermique avec $\bar{i}_n = \sqrt{4K_B T_K G B}$ et $Si(f) = 2K_B T_K G$

3.2 Le bruit de grenaille

Le franchissement d'une barrière de potentielle par un porteur de charge est un processus aléatoire à l'origine du bruit de grenaille (shot noise). Ce processus, lié à la nature granulaire de l'électricité (effet quantique) se manifeste dans tous les dispositifs actifs à jonction. Il est décrit par une distribution de Poisson et a pour fonction d'autocorrélation

$$Ri(\tau) = I_0^2 + q I_0 \delta(\tau)$$

et pour d.s.p.

$$Si(f) = I_0^2 \delta(f) + q I_0.$$

Le courant I_0 est le courant statique de polarisation de la jonction et $q = 1,6 \cdot 10^{-19} C$ est la charge de l'électron. Le premier terme de la densité spectrale correspond à un Dirac de poids I_0^2 centré à l'origine. Le second terme est le bruit de grenaille. C'est un bruit blanc avec une amplitude à densité de probabilité normale. Dans une bande de fréquence B , on peut lui associer un courant efficace de bruit

$$\bar{i}_n = \sigma i = \sqrt{2qI_0B} A.$$

Le bruit de grenaille est représentable électriquement à partir du schéma équivalent d'une diode de résistance dynamique $Rd = \frac{K_B T_K}{q I_0}$ avec à ses bornes un générateur de courant aléatoire de valeur $\bar{i}_n = \sqrt{2qI_0B}$ et $Si(f) = qI_0$ (figure 4).

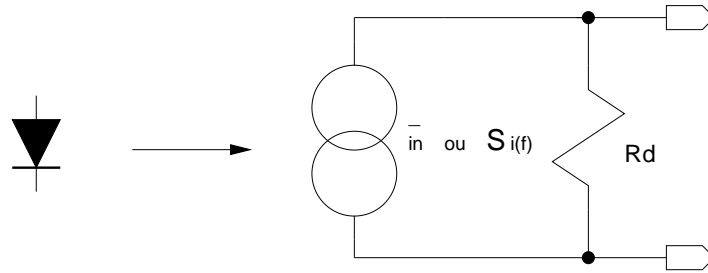


FIGURE 4 -

Modélisation du bruit de grenaille avec
 $\bar{i}_n = \sqrt{2qI_0B}$ et $Si(f) = qI_0$

3.3 Le bruit additionnel en 1/f ou bruit de scintillation

En dessous de quelques centaines de hertz, on observe dans tout composant actif et certains composants passifs (résistances au carbone), une composante de bruit présentant une d.s.p. caractérisée par une loi proportionnelle à l'inverse de la fréquence (bruit rose). Ce bruit résulte de la contribution de différents processus aléatoires encore mals connus. Dans les circuits électriques, il est généralement attribué aux fluctuations statistiques au contact des différents matériaux, aux phénomènes de création-recombinaison de paires électron-trou en surface des semi-conducteurs et à l'inhomogénéité des matériaux. Il est toujours associé à un courant direct et modélisé empiriquement par une densité spectrale

$$Si(f) = K_f \frac{I_0^a}{f^b}.$$

La constante K_f dépend du matériau, le coefficient a est compris entre 0,5 et 2 et le coefficient b est entre 0,8 et 1,3. Contrairement au bruit thermique et au bruit de grenaille, le bruit de scintillation dépend de paramètres déterminés expérimentalement et pouvant varier grandement d'un composant à l'autre, même issu d'un même lot de fabrication. Ce bruit est généralement caractérisé par une amplitude aléatoire avec une densité gaussienne. Dans une bande de fréquence $B = f_{max} - f_{min}$ et avec $b = 1$

$$\sigma_i^2 = \int_{f_{min}}^{f_{max}} Si^+(f) df = K_1 \text{Log}\left(\frac{f_{max}}{f_{min}}\right).$$

Le cas particulier où $f_{min} = 0$ pour lequel la valeur de l'intégrale diverge est levé en imposant une limite basse de fréquence de fonctionnement dépendante de l'application et fixée à la frontière entre ce qui doit être considéré comme du bruit ou une dérive lente du circuit. L'existence d'une fréquence de coupure basse nulle n'a jamais expérimentalement été observée. Comme une puissance de bruit infinie n'a pas de réalité physique, au voisinage de zéro, le bruit en $1/f$ peut être considéré comme un processus avec une d.s.p. fonction de l'instant de la fenêtre d'observation, c'est à dire non stationnaire. La puissance du bruit en $1/f$ ne dépend que du rapport f_{max}/f_{min} . Il y a autant de bruit dans la bande $0,01Hz \rightarrow 1Hz$ que dans la bande $10Hz \rightarrow 1KHz$.

3.4 Les autres sources de bruit

Deux autres sources de bruit sont parfois considérées dans les dispositifs actifs. Il s'agit du bruit de génération-recombinaison et du bruit d'avalanche.

3.4.1 Le bruit de génération-recombinaison ou bruit GR

C'est un bruit basse fréquence associé au bruit en $1/f$ et également provoqué par la présence de défauts dans un matériau se comportant en pièges pour les porteurs et agissant comme des centres de génération-recombinaison. Ce bruit est fortement dépendant de la technologie et modélisé empiriquement par la d.s.p.

$$Si(f) = K_g \frac{I_0^a}{1 + (f/f_c)^b}.$$

La fréquence de coupure f_c est fixée par la constante de temps du processus de génération-recombinaison et les constantes a et b sont des constantes technologiques généralement comprise entre 0,5 et 2 pour la première et égale à 2 pour la seconde. La distribution en amplitude de ce bruit n'est pas gaussienne si le nombre de pièges est faible. Son allure temporelle oscille aléatoirement entre deux ou trois niveaux, le bruit GR est aussi appelé bruit R.T.S. (random telegraph signal) ou bruit de popcorn.

3.4.2 Le bruit d'avalanche

Ce bruit a pour origine des phénomènes d'avalanche dans les jonctions PN polarisées en inverse où les porteurs peuvent acquérir une énergie suffisante pour créer aléatoirement des paires électron-trou par collision avec les atomes de silicium. Ce bruit, caractéristique de l'effet Zéner, est toujours associé à un courant de polarisation. Il est difficilement prévisible et généralement modélisé par la même expression que le bruit de grenaille multipliée par un facteur multiplicatif M compris entre 1 et 10 :

$$Si(f) = M q I_0.$$

4 Le théorème de Nyquist et le théorème de bode

4.1 Le théorème de Nyquist

La densité spectrale de puissance aux bornes d'un dipôle passif bruyant (*figure 5*) ne dépend que de la température et de la partie réel du dipôle [6]

$$Sv(\omega) = 2K_B T_K \Re\{Z(j\omega)\}.$$

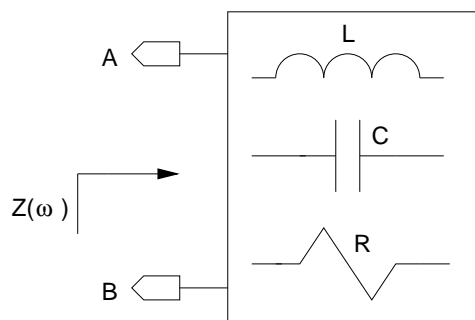


FIGURE 5 –

Illustration du théorème de Nyquist

4.2 Le théorème de Bode

La détermination de la puissance fluctuante de bruit aux bornes d'un dipôle passif nécessite le calcul de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} Sv(f) df$. Ce dernier peut être notablement simplifié en considérant le théorème de Bode (théorème des résistances intégrales [2])

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Re\{Z(j\omega)\} d\omega = \pi \left(\frac{1}{C_\infty} - \frac{1}{C_0} \right)$$

avec

$$\frac{1}{C_\infty} = \lim_{p \rightarrow \infty} p Z(p) \quad \text{et} \quad \frac{1}{C_0} = \lim_{p \rightarrow 0} p Z(p)$$

- **Exemple : le passe-bas du premier ordre** (*figure 6*)

Avec

$$Z(p) = \frac{1}{G + Cp}$$

$$Sv(\omega) = 2K_B T_K \Re\{Z(j\omega)\} = \frac{2K_B T_K G}{G^2 + C^2 \omega^2}$$

on détermine directement

$$\sigma v^2 = \frac{2K_B T_K}{2\pi} \pi \frac{1}{C} = \frac{K_B T_K}{C} \approx \frac{4 \cdot 10^{-21}}{C} \text{ V}^2.$$

Le bruit aux bornes d'un dipôle RC ne dépend que de la température et du condensateur.

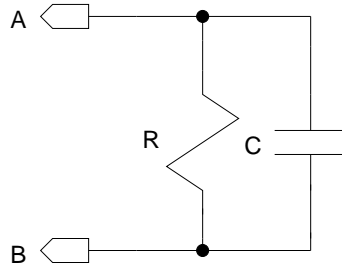


FIGURE 6 –

Passe-bas du premier ordre

5 Principe de calcul de la d.s.p. de bruit dans un circuit

Considérons un réseau électrique constitué de deux résistances bruyantes à des températures différentes $T1$ et $T2$. En modélisant chaque résistance bruyante par son schéma équivalent, on obtient la *figure 7*. Le système est linéaire et la densité spectrale

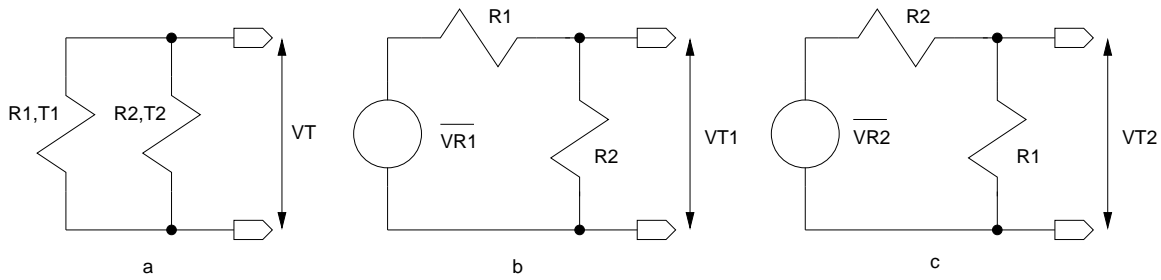


FIGURE 7 –

a :Réseau électrique à analyser

b :Schéma équivalent pour la première résistance

c :Schéma équivalent pour la seconde résistance

en sortie peut être obtenue par le principe de superposition. A une fréquence particulière f_0 , la d.s.p. a pour origine une source de tension de valeur efficace

$$\bar{v}n = \sigma v = \sqrt{\int_0^{+\infty} S_{v^+}(f) \delta(fi - f_0) df} = \sqrt{S_{v^+}(f_0)}.$$

On peut ainsi écrire

$$VT1 = V\bar{R}1 \frac{R2}{R1+R2} \quad \text{et} \quad VT2 = V\bar{R}2 \frac{R1}{R1+R2}.$$

La sortie VT est donc la somme de deux contributions aléatoires $VT1$ et $VT2$ dont on peut déterminer la densité spectrale

$$S_{VT}(f) = \left(\frac{R2}{R1 + R2}\right)^2 S_{VR1}(f) + \left(\frac{R1}{R1 + R2}\right)^2 S_{VR2}(f) + 2 \frac{R2}{R1 + R2} \frac{R1}{R1 + R2} S_{VR1 VR2}(f).$$

Si les sources aléatoires sont décorrélées :

$$S_{VT}(f) = \left(\frac{R2}{R1 + R2}\right)^2 S_{VR1}(f) + \left(\frac{R1}{R1 + R2}\right)^2 S_{VR2}(f).$$

● **Exemple : association de résistances bruyantes**

On considère une résistance bruyante R à la température T caractérisée par une densité spectrale présentant un bruit en $1/f$, et on considère la résistance équivalente du point de vue ohmique formée par l'association parallèle de trois résistances R (*figure 8*). Pour la résistance seule, on a

$$Sv(f) = 2K_B T_K R + K_f \frac{I_0^2}{f}.$$

Pour une résistance du pont, on a

$$Sv(f)' = 2K_B T_K R + K_f \frac{I_0^2}{9f}.$$

Pour les 9 résistances, on a

$$Sv(f)' = 9(Sv(f)' \left(\frac{3R/2}{3R+3R/2}\right)^2) = Sv(f)' = 2K_B T_K R + K_f \frac{I_0^2}{9f}.$$

Ainsi, par un groupement série-parallèle de résistance, on réduit l'influence d'un éventuel bruit de scintillation.

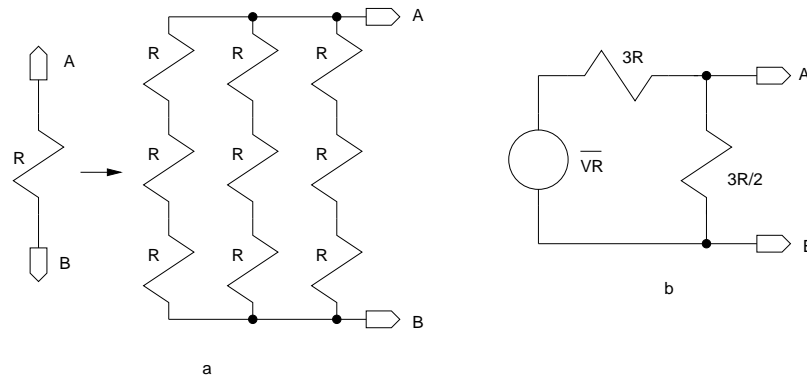


FIGURE 8 –

a : Réseau électrique à analyser
b : Schéma équivalent pour le calcul d'une source aléatoire

6 Bruit aux bornes d'une association de résistances bruyantes

Si on considère uniquement le bruit thermique, et si la température des résistances sont identiques, on vérifie facilement sur les *figures 9 et 10* les équivalences généralisables à un nombre quelconque de résistances.

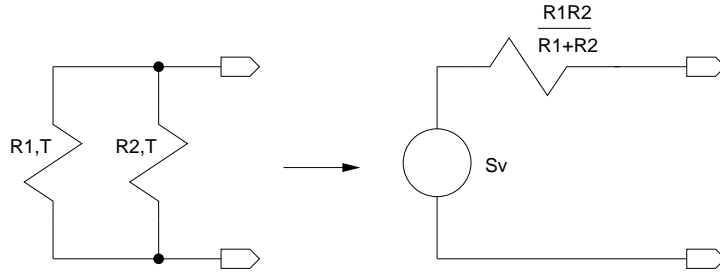


FIGURE 9 -

Association parallèle de résistances bruyantes :

$$Sv = 2K_B T_K \frac{R1R2}{R1+R2}$$

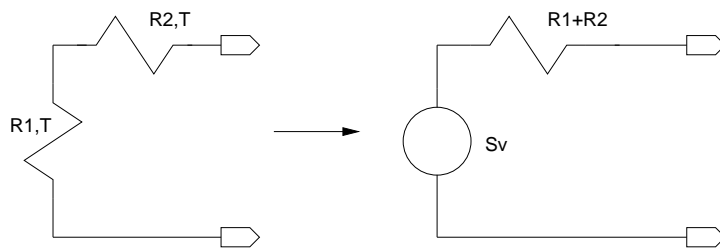


FIGURE 10 -

Association série de résistances bruyantes :

$$Sv = 2K_B T_K (R1 + R2)$$

7 Conditionnement du bruit par un système linéaire

7.1 Cas général

Considérons un système linéaire *figure 11* caractérisé par sa réponse impulsionnelle $h(t)$ et par sa fonction de transfert $H(p)$. Pour un signal déterministe en entrée $e(t)$, on obtient la sortie $s(t)$ telle que

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t - \alpha) h(\alpha) d\alpha = e(t) * h(t)$$

et

$$S(p) = E(p) H(p)$$

Pour un signal d'entrée ergodique de fonction de corrélation $Re(\tau)$ et de densité spectrale $Se(f)$, on a les relations [6]

$$Rs(\tau) = Re(\tau) h(\tau) h(-\tau)$$

et

$$Ss(f) = |H(j\omega)|^2 Se(f).$$

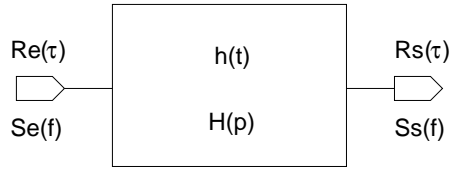


FIGURE 11 –

Système linéaire

Ainsi, si la fonction de transfert de la j^{ieme} source de tension de bruit à la sortie est $H_j(f)$ et si l'impédance de transfert de la k^{ieme} source de courant de bruit à la sortie est $Z_k(f)$, par superposition, on peut écrire

$$Ss(f) = \sum_j Sv_j |H_j(f)|^2 + \sum_k Si_k |Z_k(f)|^2$$

● **Exemple :le passe-bas du premier ordre revisité**

Pour le passe-bas du premier ordre de la *figure 12*

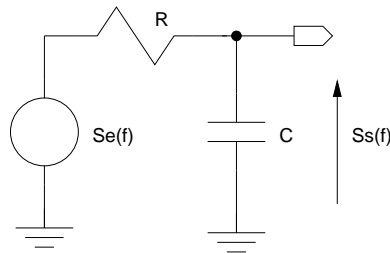


FIGURE 12 –

Passe-bas du premier ordre

$$T(p) = \frac{1}{1+RCp}$$

et

$$h(t) = \frac{1}{RC}e^{-t/RC}.$$

La d.s.p. $Se(f) = N_0 = 2K_B T_K R$ est générée par la résistance R . Elle correspond à la fonction d'autocorrélation $Re(\tau) = N_0\delta(\tau)$. En sortie

$$Rs(\tau) = \frac{N_0}{2RC}e^{-|\tau|/RC} \quad \text{et} \quad Ss(f) = \frac{N_0}{1 + (RC\omega)^2}$$

La puissance fluctuante σv^2 peut être calculer par intégration de la d.s.p., mais beaucoup plus simplement, c'est également

$$Rs(0) = \frac{K_B T_K}{C}.$$

Bien évidemment, on retrouve les résultats déjà établis par le théorème de Nyquist.

7.2 Conditionnement d'un bruit blanc

Si $S_e^+(f) = N_0 V^2/Hz$ est la d.s.p. monolatérale d'un bruit blanc à l'entrée d'un système linéaire, la densité spectrale de sortie est donnée par

$$S_s^+(f) = |H(j\omega)|^2 N_0.$$

Pour obtenir la puissance fluctuante de bruit, on doit déterminer

$$\sigma_{vs}^2 = N_0 \int_0^{+\infty} |H(j\omega)|^2 df$$

c'est à dire calculer l'intégrale $\mathcal{H} = \int_0^{+\infty} |H(j\omega)|^2 df$.

Pour une fonction de transfert ayant le degré de son numérateur inférieur au degré de son dénominateur (un pôle au moins à l'infini), \mathcal{H} peut être exprimée analytiquement. La *table 1* donne la valeur de cette intégrale pour les fonctions de transfert de type passe-bas et passe-bande.

H(p)	\mathcal{H}
$\frac{K\omega_c}{p+\omega_c}$	$\frac{K^2}{4}\omega_c$
$\frac{K\omega_{c1}\omega_{c2}}{(p+\omega_{c1})(p+\omega_{c2})}$	$\frac{K^2}{4}\frac{\omega_{c1}\omega_{c2}}{\omega_{c1}+\omega_{c2}}$
$\frac{K\omega_0^2}{p^2+p\frac{\omega_0}{Q_0}+\omega_0^2}$ avec $Q_0 > 0.5$	$\frac{K^2}{4}\omega_0 Q_0$
$\frac{Kp\omega_{c2}}{(p+\omega_{c1})(p+\omega_{c2})}$	$\frac{K^2}{4}\frac{\omega_{c2}^2}{\omega_{c1}+\omega_{c2}}$
$\frac{K\frac{\omega_0}{Q_0}p}{p^2+p\frac{\omega_0}{Q_0}+\omega_0^2}$ avec $Q_0 > 0.5$	$\frac{K^2}{4}\frac{\omega_0}{Q_0}$

TABLE 1 –

Conditionnement d'un bruit blanc

7.3 Bande équivalente de bruit

A toute fonction de transfert $H(p)$, on peut faire correspondre une bande passante B_b laissant passer une puissance de bruit blanc (*figure 13*) telle que

$$H_0^2 B_b = \int_0^{+\infty} |H(j\omega)|^2 df.$$

Ainsi, pour un passe-bas de gain statique unitaire

$$B_b = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+f^2/f_c^2} df = \frac{\pi}{2} f_c.$$

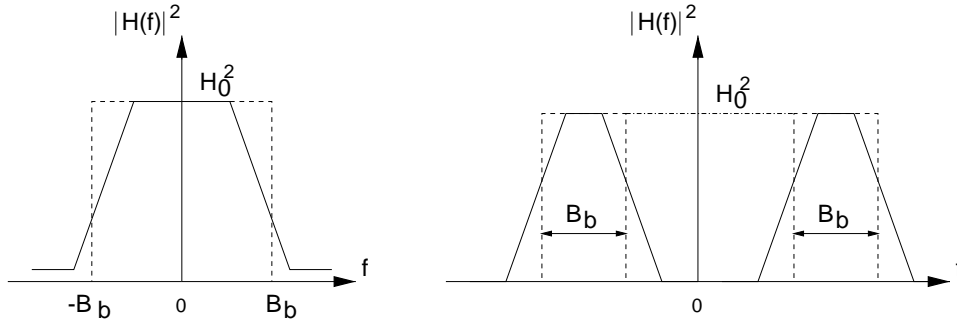


FIGURE 13 –

Bande équivalente de bruit pour un passe-bas et un passe-bande

8 Représentation des quadripôles bruyants

8.1 Représentation à générateurs de tension et de courant

Sans sources internes (*figure 14*), on peut donner une représentation d'un quadripôle [8] [5] à partir de sa matrice impédance telle que

$$[V] = [Z] [I]$$

soit

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 &= Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2. \end{aligned}$$

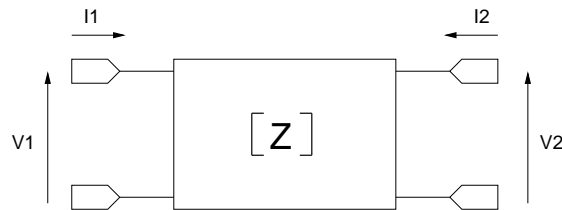


FIGURE 14 –

Représentation impédance d'un quadripôle sans source interne

Si le quadripôle contient des sources internes, on peut généraliser le théorème de Thévenin et extraire les sources pour représenter le quadripôle par un réseau libre de source interne et deux sources de tension placées en série avec les accès *figure 15* telles que

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 + E_1 \\ V_2 &= Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 + E_2. \end{aligned}$$

Pour un quadripôle bruyant, en remplaçant les générateurs de bruit internes par

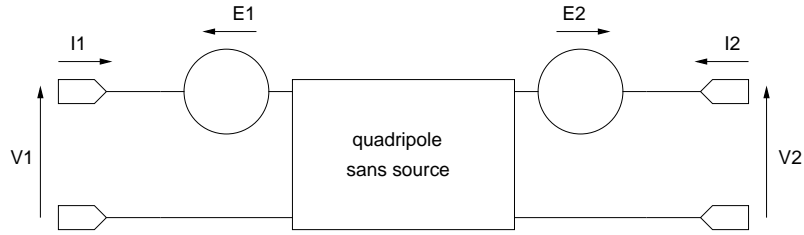


FIGURE 15 –

Représentation impédance d'un quadripôle avec sources internes

des générateurs externes, on arrive à la même représentation (*figure 16*). Bien entendu, les générateur \bar{E}_{n1} et \bar{E}_{n2} peuvent être remplacés par le d.s.p. équivalente.

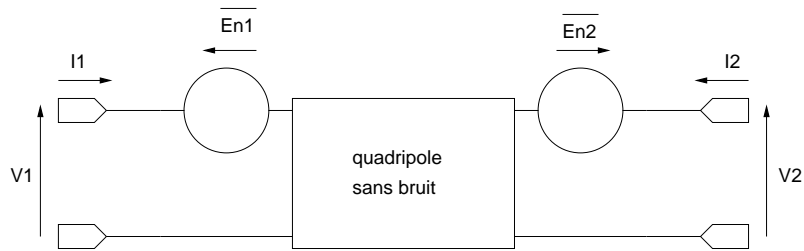


FIGURE 16 –

Représentation générateur de tension d'un quadripôle bruyant

De même que l'on peut donner une représentation d'un quadripôle bruyant à partir d'un quadripôle sans bruit et deux sources de tension, on peut donner une représentation équivalente de Norton avec deux sources de courant (*figure 17*) à partir des deux équations aux admittances

$$I1 = Y11 V1 + Y12 V2 + \bar{J}_{n1}$$

$$I2 = Y21 V1 + Y22 V2 + \bar{J}_{n2}$$

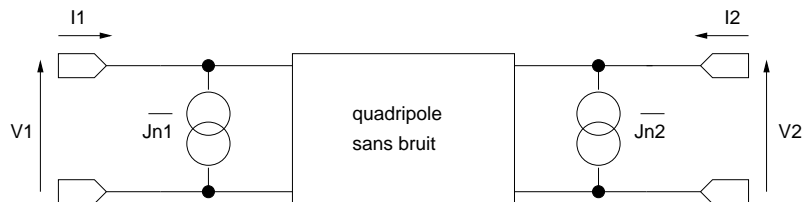


FIGURE 17 –

Représentation générateur de courant d'un quadripôle bruyant

8.2 Représentation à générateurs de bruit ramenés à l'entrée

Dans ce cas, le bruit intrinsèque du quadripôle est ramené à l'entrée par un générateur de tension et un générateur de courant (*figure 18*). Cette modélisation découle d'une représentation du quadripôle à partir de sa matrice chaîne

$$\begin{aligned} V_1 &= A_{11} V_2 + A_{12} I_2 + \bar{E}n \\ I_1 &= A_{21} V_2 + A_{22} I_1 + \bar{J}n. \end{aligned}$$

Partant de la représentation générateur de tension, on peut en effet écrire

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11} \frac{V_2 - Z_{22} I_2 - \bar{E}n_2}{Z_{21}} + Z_{12} I_2 + \bar{E}n_1 = A_{11} V_2 + A_{12} I_2 + \bar{E}n \\ I_1 &= \frac{V_2 - Z_{22} I_2 - \bar{E}n_2}{Z_{21}} = A_{21} V_2 + A_{22} I_1 + \bar{J}n. \end{aligned}$$

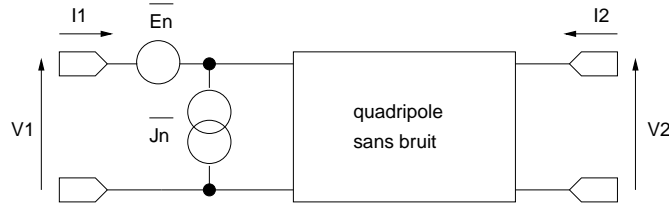


FIGURE 18 –

Représentation générateurs de bruit à l'entrée d'un quadripôle bruyant

Cette représentation du quadripôle est la plus utilisée. D'une part, du fait que le courant de bruit et la tension de bruit peuvent être déterminés expérimentalement, respectivement avec l'entrée ouverte et l'entrée en court-circuit. D'autre part, du fait que le bruit peut directement être comparé au signal utile entrant dans le quadripôle.

8.3 Prise en compte des corrélations entre les sources

Quelque soit le mode de représentation choisi pour le quadripôle, les tensions et les courants ramenés en entrée et éventuellement en sortie sont des combinaisons de sources internes de bruit pouvant être corrélées. Une modélisation analytique peut être réalisée en séparant la partie corrélée et la partie non corrélée de chaque générateur. Ainsi, pour la dernière représentation, on pose

$$\begin{aligned} \bar{E}n &= \bar{E}n_a + \bar{J}n Z_{cor} \\ \bar{J}n &= \bar{J}n_a + \bar{E}n Y_{cor} \end{aligned}$$

La corrélation entre \$\bar{E}n\$ et \$\bar{J}n\$ est prise en compte par une impédance de corrélation fictive \$Z_{cor} = R_{cor} + jX_{cor}\$ non bruyante et une admittance de corrélation fictive \$Y_{cor} = G_{cor} + jB_{cor}\$ non bruyante. En considérant \$\bar{E}n^*\$ le conjugué de \$\bar{E}n\$ et en considérant \$\bar{J}n^*\$ le conjugué de \$\bar{J}n\$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \bar{J}_n^* \bar{E}_n &= \bar{J}_n^* \bar{E}_{na} + \bar{J}_n^* \bar{J}_n Z_{cor} \\ \bar{E}_n^* \bar{J}_n &= \bar{E}_n^* \bar{J}_{na} + \bar{E}_n^* \bar{E}_n Y_{cor}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$Z_{cor} = \frac{\bar{J}_n^* \bar{E}_n}{|\bar{J}_n|^2} \quad \text{et} \quad Y_{cor} = \frac{\bar{E}_n^* \bar{J}_n}{|\bar{E}_n|^2}.$$

Pour obtenir une modélisation électrique de la corrélation, on peut considérer le schéma de la *figure 19*.

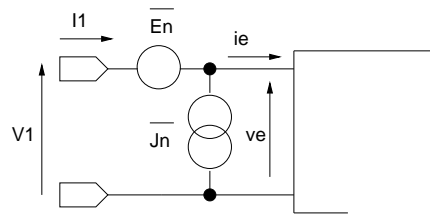


FIGURE 19 –

Représentation générateurs de bruit à l'entrée d'un quadripôle bruyant

Il permet décrire

$$I1 = ie + \bar{J}_n = ie + \bar{J}_{na} + Y_{cor}(V1 - ve).$$

On arrive ainsi au schéma équivalent de la *figure 20*.

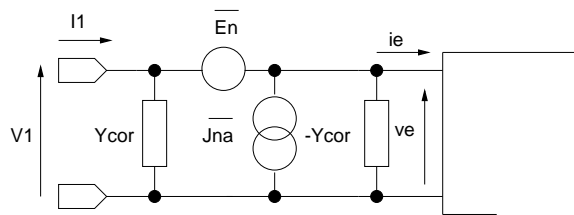


FIGURE 20 –

Représentation générateurs de bruit corrélés à l'entrée d'un quadripôle bruyant

De même, à partir de

$$V1 = ve + \bar{E}_n = ve + \bar{E}_{na} + Z_{cor}(I1 - ie).$$

on arrive au schéma dual équivalent de la *figure 21*.

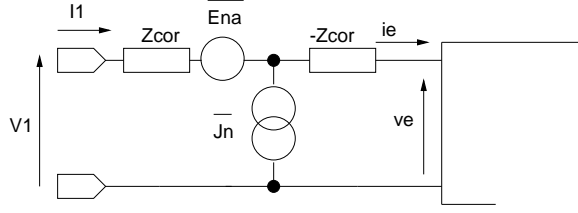


FIGURE 21 –

Représentation duale générateurs de bruit corrélés à l'entrée d'un quadripôle bruyant

8.4 Facteur de bruit d'un quadripôle

Le facteur de bruit F est un indice de performance caractérisant la qualité d'un système linéaire du point de vue de son bruit propre. Il est défini à $T_0 = 290K$ comme le rapport du signal à bruit à l'entrée sur le rapport de signal à bruit en sortie (figure 22).

$$F = \frac{P_{se}/P_{ne}}{P_{ss}/P_{ns}}$$

En considérant le gain G et le bruit intrinsèque P_{ni} du quadripôle, on écrit

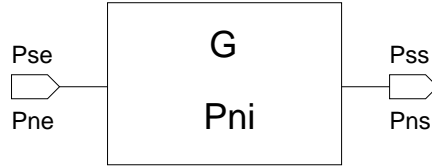


FIGURE 22 –

Quadripôle bruyant

$$F = \frac{P_{se} P_{ns}}{P_{ne} P_{ss}} = \frac{P_{se}(G P_{ne} + P_{ni})}{P_{ne} G P_{se}} = 1 + \frac{P_{ni}}{G P_{ne}}$$

Le facteur P_{ni}/G est par définition le bruit du quadripôle ramené en entrée et P_{ne} est la puissance de bruit de l'entrée.

Considérons un quadripôle bruyant modélisé par sa représentation avec générateurs de bruits en entrée, attaqué par un générateur Eg avec son impédance $Zg = Rg + jXg$ (figure 23).

Pour l'entrée, on peut déterminer pour le bruit une équivalence de Thévenin telle que

$$E_{n_{Th}} = \bar{E}n + Zg \bar{J}n = \bar{E}n_a + (Z_{cor} + Zg) \bar{J}n.$$

En termes de d.s.p., on écrit

$$S_{Th}(f) = S_{E_{na}}(f) + |Z_{cor} + Zg|^2 S_J$$

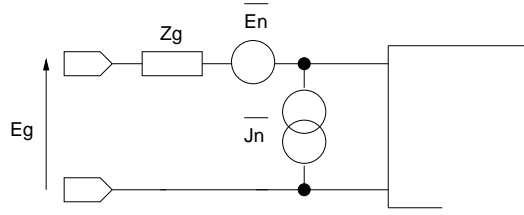


FIGURE 23 –

Modèle de calcul du facteur de bruit

soit en considérant deux résistances équivalentes de bruit pour $S_{Ena}(f)$ et $S_J(f)$

$$S_{Th}(f) = 2K_B T_K R_{Ena} | Z_{cor} + Z_g |^2 2K_B T_K G_J.$$

Pour le facteur de bruit, on obtient ainsi

$$F = 1 + \frac{4K_B T_K B (R_{Ena} + |Z_{cor} + Z_g|^2 G_J)}{4K_B T_K B R_g}$$

soit

$$F = 1 + \frac{R_{Ena} + G_J ((R_{cor} + R_g)^2 + (X_{cor} + X_g)^2)}{R_g}.$$

Une optimisation du facteur de bruit est réalisée pour

$$X_{g_{opt}} = -X_{cor} \quad \text{et} \quad R_{g_{opt}} = \sqrt{\frac{R_{cor}^2}{G_J} + R_{Ena}}$$

avec

$$F_{min} = 1 + 2G_J (R_{cor} + R_{g_{opt}}).$$

Dans le cas où les générateurs de bruit sont décorrélés et où $Z_g = R_g$

$$F = 1 + \frac{\sigma_{En}^2 + R_g^2 \sigma_J^2}{4K_B T_K R_g B} \quad R_{g_{opt}} = \frac{\sigma_{En}}{\sigma_J} \quad \text{et} \quad F_{min} = 1 + \frac{\sigma_{En} \sigma_J}{2K_B T_K R_g B}$$

8.5 Mise en cascade de quadripôles bruyants

On considère la chaîne de quadripôles de la *figure 24*. La puissance de bruit à l'entrée est identique pour tous les quadripôles et égale à Pn_1 (tous les quadripôles voient le même circuit d'attaque).

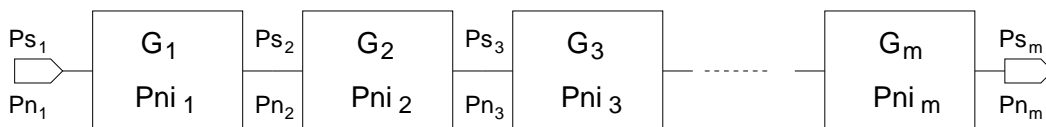


FIGURE 24 –

Cascade de quadripôles bruyants

A partir de

$$\prod_{k=1}^m G_k = G$$

et

$$F_j = \frac{P_{s_j} P_{n_{j+1}}}{P_{n_1} P_{s_{j+1}}} = \frac{P_{n_{j+1}}}{G_j P_{n_1}} = 1 + \frac{P_{ni_j}}{G_j P_{n_1}}$$

soit

$$P_{n_{j+1}} = F_j G_j P_{n_1} \quad \text{et} \quad P_{ni_j} = (F_j - 1) G_j P_{n_1},$$

on écrit récursivement

$$P_{n_2} = F_1 G_1 P_{n_1}$$

$$P_{n_3} = G_2 P_{n_2} + P_{ni_2} = F_1 G_1 G_2 P_{n_1} + (F_2 - 1) G_2 P_{n_1}$$

$$P_{n_4} = G_3 P_{n_3} + P_{ni_3} = F_1 G_1 G_2 G_3 P_{n_1} + (F_2 - 1) G_2 G_3 P_{n_1} + (F_3 - 1) G_3 P_{n_1}$$

...

$$P_{n_m} = G_{m-1} P_{n_{m-1}} + P_{ni_{m-1}}$$

$$P_{n_m} = F_1 \prod_{k=1}^{m-1} G_k P_{n_1} + (F_2 - 1) \prod_{k=2}^{m-1} G_k P_{n_1} + \dots + (F_{m-1} - 1) G_{m-1} P_{n_1}$$

$$P_{n_m} = F G P_{n_1}$$

D'où la formule finale (formule de Friis)

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1 G_2} + \dots + \frac{F_{m-1}}{\prod_{k=2}^{m-1} G_k}.$$

Si $G_1 \gg (F_2 - 1)$, on a $F \approx F_1$, et on constate que le bruit global est essentiellement déterminé par le premier étage.

9 Le bruit dans le transistor bipolaire

9.1 Schéma équivalent physique pour le bruit

Les sources primaires de bruit du transistor bipolaire ont essentiellement pour origine [4]

1. le bruit thermique des accès aux jonctions. Ce bruit thermique étant principalement issu de la résistance de base rb

$$S_{rb} = 2 K_B T_K rb.$$

2. le bruit de jonction émetteur-base, avec une composante de bruit de grenaille, une composante de bruit de scintillation et une composante de bruit GR

$$S_{ib} = q IB_0 + K_f IB_0^a \frac{1}{f} + K_g IB_0^b \frac{1}{1 + (f/f_c)^2}.$$

3. le bruit de la jonction collecteur-base

$$S_{ic} = q IC_0.$$

Compte tenu de ces différentes sources de bruit et de leur origine, pour le transistor bipolaire, on peut donner comme modèle pour le bruit, le schéma équivalent de la *figure*

25

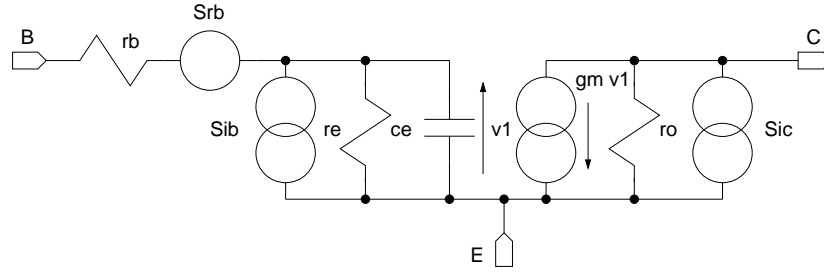


FIGURE 25 –

*Schéma équivalent physique moyennes fréquences
pour le calcul du bruit du transistor bipolaire*

9.2 Schéma équivalent avec générateurs de bruit à l'entrée

A partir du schéma équivalent physique moyennes fréquences on peut déterminer le schéma équivalent avec générateurs de bruit à l'entrée, par identification électrique des modèles de la *figure 26* et de la *figure 27*.

Pour déterminer le générateur de bruit en entrée $\bar{E}n$, on court-circuite les entrées des deux schémas. En considérant que la résistance rb est faible devant la combinaison parallèle $re//ce$, on identifie les courants de sortie

$$gm \bar{E}n = gm v1 \bar{icn}.$$

Si \bar{icn} et $v1$ ne sont pas corrélés, sans considérer le bruit GR et avec

$$gm = \frac{IC_0}{V_T} = q \frac{IC_0}{K_B T_K},$$

on détermine

$$SEn = 2 K_B T_K rb + q \frac{IC_0}{gm^2} = 2 K_B T_K \left(rb + \frac{1}{2gm} \right) = 2 K_B T_K Re_{eq}.$$

La résistance Re_{eq} est une résistance fictive de bruit équivalente ramenée à l'entrée du dispositif.

En ouvrant les entrées des deux schémas, et en considérant les deux courants de sortie

$$gm \bar{J}n (re//ce p) = gm \bar{ibn} (re//ce p) + \bar{icn}.$$

En posant

$$gm \frac{re}{1+re ce p} = \frac{\beta_0}{1+j \frac{\omega}{\omega_\beta}}$$

on obtient

$$\bar{J}n^2 = \bar{ibn}^2 + \frac{\bar{icn}^2}{|\beta(j\omega)|^2}$$

d'où

$$SJn = q (IB_0 + K'_1 IB_0^a \frac{1}{f} + \frac{IC_0}{|\beta(j\omega)|^2}).$$

En basse fréquence et avec $\beta_0 \gg 1$, les d.s.p. SEn et SJn n'ont pas de terme commun, elles sont décorrélées. Le générateur de tension de bruit est indépendant de la fréquence et son influence est minimisée pour un fort courant de collecteur. Quant au générateur de courant de bruit, il est minimum pour les fortes valeurs de gain en courant β_0 et faible courant de collecteur.

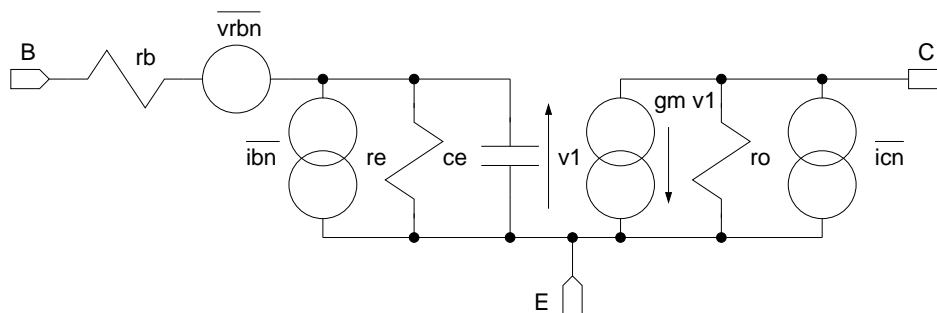


FIGURE 26 –

*Schéma équivalent simplifié
pour le calcul du bruit du transistor bipolaire*

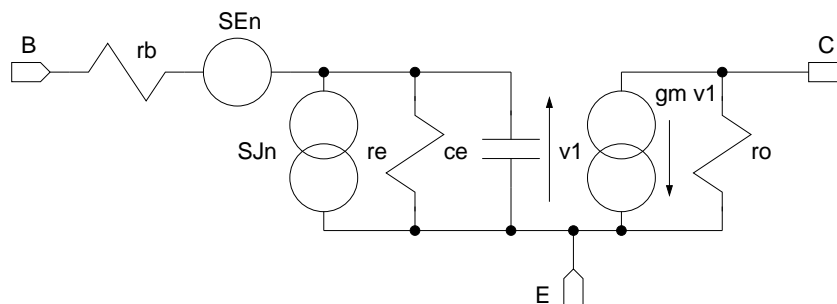


FIGURE 27 –

*Schéma équivalent du transistor bipolaire
avec générateurs de bruit à l'entrée*

9.3 Facteur de bruit et résistance de source optimale

Avec

$$SJn \approx q \frac{IC_0}{\beta_0}$$

on détermine

$$Rg_{opt} = \frac{\sqrt{\beta_0}}{gm} \sqrt{1 + 2gm rb}$$

et

$$F_{min} = 1 + \frac{1}{\sqrt{\beta_0}} \sqrt{1 + 2gm rb}.$$

10 Le bruit dans le transistor MOS

10.1 Schéma équivalent physique pour le bruit

Pour le transistor MOS fonctionnant en **régime ohmique**, le canal est une résistance générant un bruit thermique de densité spectrale $S_{th} \approx 2K_B T_K R_{DS}$, R_{DS} étant la résistance drain-source approximativement égale à l'inverse de la transconductance gm du dispositif. En saturation, à cause des différents effets de champ, on observe une réduction du bruit de l'ordre de $2/3$. Si on tient compte du fait que les défauts d'interface entre la grille et le canal sont à l'origine d'un important bruit de scintillation, en régime saturé, la densité spectrale bilatérale de bruit du courant de drain peut donc s'exprimer par

$$S_{id} = \frac{4}{3} K_B T_K gm + \frac{K_f gm^2}{C_{ox}^a WL} \frac{1}{f}.$$

D'autre part, si on considère l'éventuel courant de fuite de la grille ig qui crée un bruit de grenaille de valeur

$$S_{ig} = q ig$$

on obtient le schéma équivalent physique pour les moyennes fréquences de la *figure 28*.

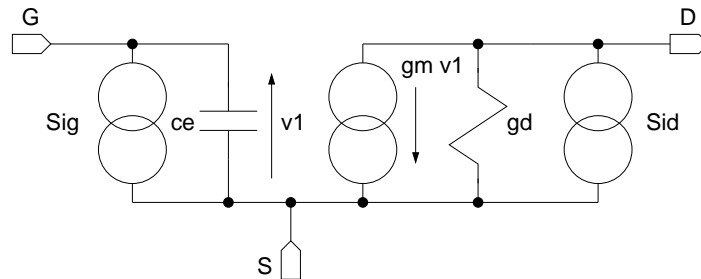


FIGURE 28 –

*Schéma équivalent physique moyennes fréquences
pour le calcul du bruit du transistor MOS*

10.2 Schéma équivalent avec générateurs de bruit à l'entrée

Pour déterminer le schéma équivalent avec générateurs de bruit à l'entrée, il suffit d'identifier électriquement les modèles de la *figure 29* et de la *figure 30*. Le bruit de grenaille étant négligé, le générateur de tension de bruit équivalent d'entrée $\bar{E}n$ est déterminé en court-circuitant les entrées des deux schémas. En identifiant les courants de sortie, on écrit

$$gm \bar{E}n = i\bar{d}n,$$

d'où

$$SEn = \frac{4}{3} K_B T_K \frac{1}{gm} + \frac{K_f}{Cox^a WL} \frac{1}{f}$$

Le générateur de courant de bruit équivalent en entrée $\bar{J}n$ est déterminé en ouvrant les entrées des deux schémas. Par identification des courants de sortie, on obtient

d'où $gm \frac{\bar{J}n}{ce p} = i\bar{d}n$ soit $\bar{J}n^2 = \frac{\omega^2 ce^2}{gm^2} i\bar{d}n^2$

$$SJn = \frac{\omega^2 ce^2}{gm^2} \left(\frac{4}{3} K_B T_K gm + \frac{K_f}{Cox^a WL} \frac{1}{f} gm^2 \right).$$

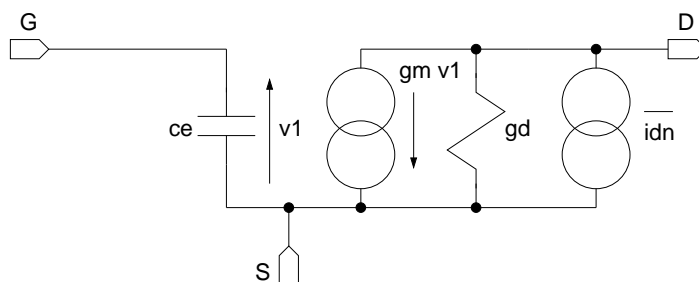


FIGURE 29 -

Schéma équivalent simplifié pour le calcul du bruit du transistor MOS

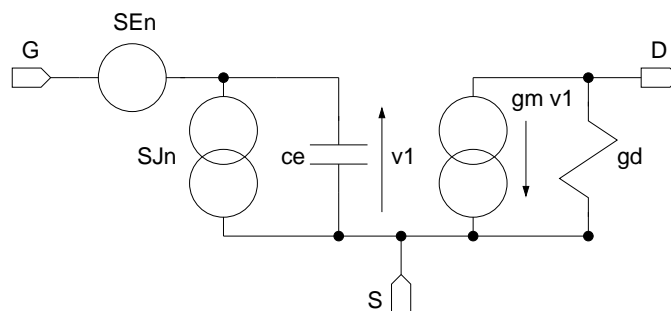


FIGURE 30 -

Schéma équivalent du transistor MOS avec générateurs de bruit à l'entrée

Aux basses fréquences, l'influence du générateur de tension de bruit est prépondérante sur le générateur de courant, la résistance de source optimale est infinie

$$R_{gopt} \rightarrow \infty$$

et le facteur de bruit est unitaire

$$F \rightarrow 1.$$

Pour une même forte résistance d'attaque, le transistor MOS présente des performances en bruit généralement supérieures à celles du transistor bipolaire. Pour un même courant de polarisation, la transconductance gm du bipolaire est généralement supérieure à celle du MOS. Ainsi, pour une faible impédance d'attaque, en terme de bruit, le bipolaire est supérieur au MOS.

11 Le bruit dans l'amplificateur opérationnel

11.1 Modélisation du bruit

Comme la plus grande partie des circuits intégrés linéaires, l'étage d'entrée d'un amplificateur opérationnel est un amplificateur différentiel. Le bruit de chacune des deux voies d'amplification peut être ramené sur les deux entrées comme l'indique la *figure 31*. Les deux générateurs de tension de bruit en série dans la maille d'entrée sont généralement regroupés en un seul pour donner le modèle d'amplificateur opérationnel bruité de la *figure 32*.

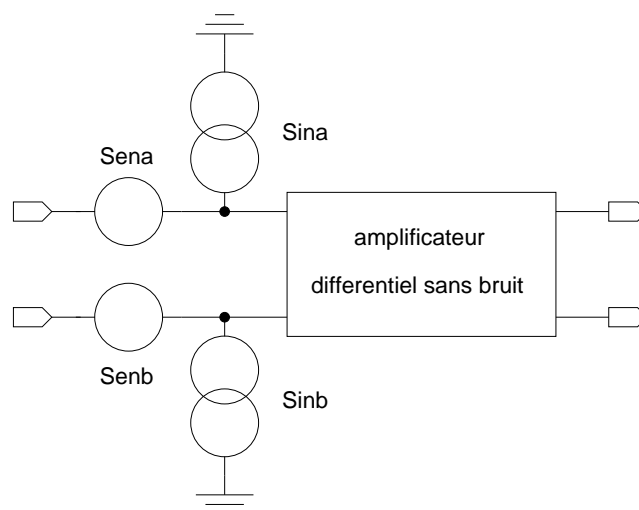


FIGURE 31 –

Modélisation de l'amplificateur différentiel bruité

11.2 Influence de la contre réaction sur le bruit

Si nous considérons l'amplificateur de tension réalisé à partir d'un amplificateur opérationnel, on obtient le schéma équivalent pour le bruit de la *figure 33*. Avec les différentes fonctions de transfert

$$H_{R1} = -\frac{R2}{R1} \quad H_{R2} = 1 \quad H_{vnaop} = 1 + \frac{R2}{R1} \quad \text{et} \quad Z_{inaop} = R2,$$

on détermine

$$v\bar{n}s = \frac{R2}{R1}v\bar{n}_{R1} + v\bar{n}_{R2} + \left(1 + \frac{R2}{R1}\right)v\bar{n}_{aop} + R2i\bar{n}_{aop}.$$

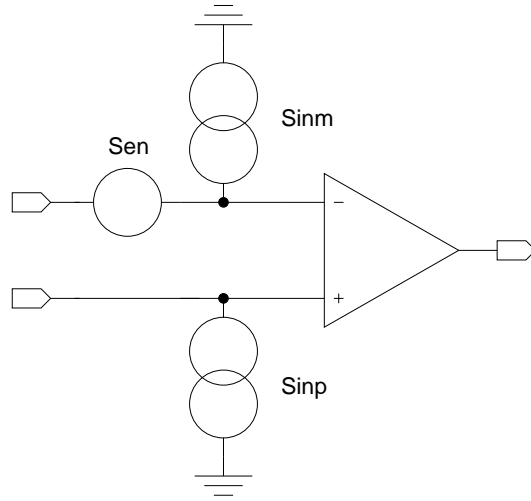


FIGURE 32 –

Modélisation de l'amplificateur opérationnel bruyant

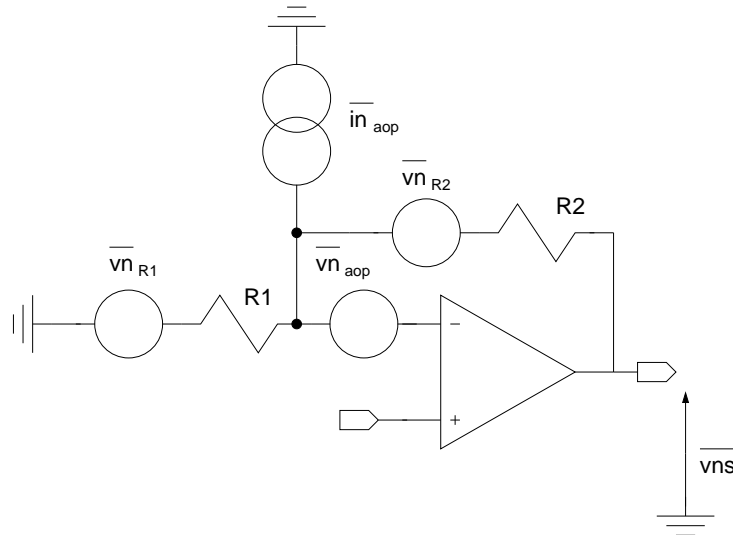


FIGURE 33 –

Modèle pour le calcul du bruit de l'amplificateur de tension

soit

$$S_{s^+}(f) = \left(\frac{R2}{R1}\right)^2 4K_B T_K R1 + 4K_B T_K R2 + \left(1 + \frac{R2}{R1}\right)^2 S_{e_{aop}^+}(f) + R2^2 S_{i_{aop}^+}(f).$$

Si on identifie cette tension de bruit avec la sortie du montage non inverseur avec générateur de bruit à l'entrée (figure 34), avec l'entrée en court circuit telle que

$$v_{\bar{n}s} = \left(1 + \frac{R2}{R1}\right) e_{\bar{n}e},$$

on calcule

$$e_{\bar{n}e} = v_{\bar{n}aop} + (R2//R1) i_{\bar{n}aop} + \frac{R1}{R1 + R2} v_{\bar{n}R2} + \frac{R2}{R1 + R2} v_{\bar{n}R1}.$$

La contre réaction dégrade globalement les performances en bruit de l'amplificateur opérationnel.

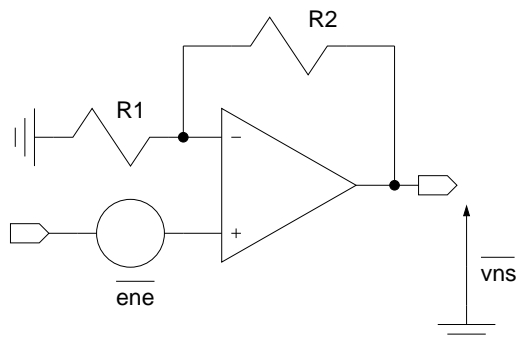


FIGURE 34 –

Modèle générateur de tension de bruit en entrée de l'amplificateur de tension

12 Le bruit dans les circuits à capacités commutées

Les sources primaires de bruit considérées dans un circuit à capacités commutées [3] ont pour origine les résistances des commutateurs à l'état passant et les amplificateurs opérationnels. Deux types de bruit sont présents en sortie d'un circuit analogique temps discret. Le premier est un bruit direct large bande issu du bruit des commutateurs et de l'amplificateur opérationnel. Son calcul peut être effectué par des techniques d'analyse classiques temps continu. Quant au second, il correspond à une suite aléatoire d'échantillons résultant de la discrétisation du bruit large bande sur les capacités à l'ouverture des commutateurs, puis sont transférées en sortie comme un signal temps discret. La bande du bruit échantillonné étant très supérieure à la fréquence d'échantillonnage Fe , il est sous échantillonné (les constantes de temps du circuit sont petites devant $Te = 1/Fe$ pour assurer l'établissement intégral des charges) et deux échantillons successifs sont pratiquement décorrélés (en termes de fonction de corrélation , $\tau \ll Te$). Les techniques de calculs sont ainsi différentes de celles utilisables lorsque que le signal satisfait le critère de Nyquist.

12.1 L'échantillonnage du bruit

Considérons un simple commutateur M (transistor MOS) commandé par une horloge Φ de période $Te = 1/Fe$ et de durée active αTe . Dans l'état passant, le transistor MOS bruyant peut être modélisé par une résistance sans bruit en série avec une source de bruit de densité spectrale Ssw . Dans l'état bloqué, le commutateur peut être considéré comme un circuit ouvert (la constante de temps associée est tellement basse que la puissance de bruit correspondante est négligeable et assimilable à une dérive lente du circuit). Ainsi, comme le montre la *figure 35*, le signal de bruit $v\bar{c}n$ présent aux bornes du condensateur C est la superposition de deux composantes. La première composante $v\bar{c}n_d$, est un signal de bruit directe de durée αTe . La seconde $v\bar{c}n_{eb}$ est une composante aléatoire échantillonnée bloquée correspondant à la valeur de bruit échantillonnée aux

instants $(n + \alpha)Te$ et bloquée pendant une durée $(1 - \alpha)Te$. On peut noter que cette valeur est considérée au moment où la charge du condensateur est établie. Ce bruit ne présentera pas de composante en $1/f$ puisque le bruit de scintillation est toujours associé à une circulation de courant. Les deux types de bruit sont décorrélés et leur d.s.p. peuvent être additionnées.

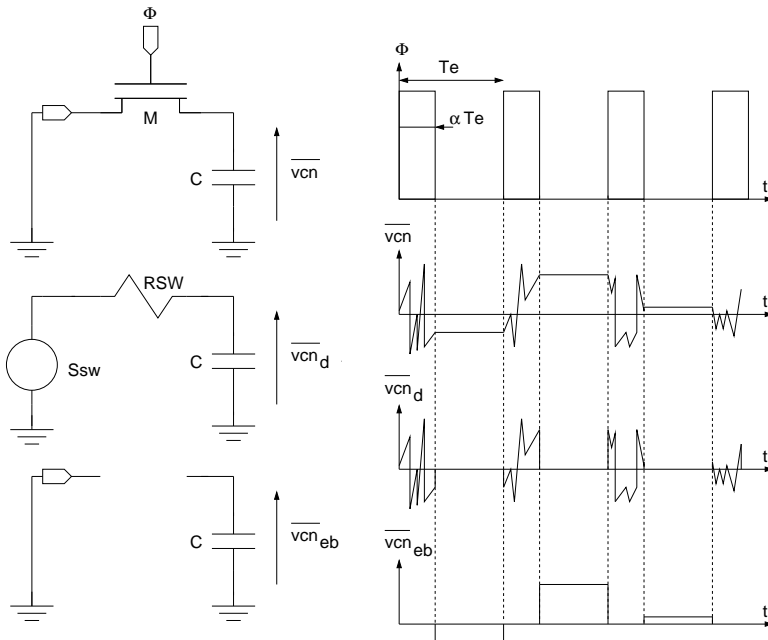


FIGURE 35 –

Echantillonnage du bruit

12.2 L'échantillonnage d'un bruit blanc filtré par un passe-bas

Si S_o est la d.s.p. d'un signal à l'entrée d'un filtre passe-bas du premier ordre de fréquence de coupure f_c , on obtient en sortie du filtre une d.s.p.

$$S_x(f) = \frac{S_o}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}.$$

Après échantillonnage à une cadence Fe , cette d.s.p. est donnée par

$$S_y(f) = S_o \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{f-nFe}{f_c}\right)^2}.$$

A partir de l'identité de Poisson

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nFe) = Te \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nTe) e^{-j\omega nTe},$$

la sommation précédente peut s'écrire

$$S_y(f) = S_o \pi \frac{f_c}{Fe} \frac{\sinh(2\pi \frac{f_c}{Fe})}{\cosh(2\pi \frac{f_c}{Fe}) - \cos(2\pi \frac{f}{Fe})}.$$

Si $P_o = S_o \pi f_c / F_e$ représente la puissance totale de bruit en sortie du passe-bas, on constate (figure 36) que la fonction $S_y(f)$ tend très rapidement vers P_o dès que F_e est supérieure à f_c . D'autre part, l'expression analytique de $S_y(f)$ montre clairement le repliement en bande de base dû au sous échantillonnage du bruit large bande. Ce repliement fait que les circuits à capacités commutées sont plus bruyants que leur homologue temps continu, et que le bruit en $1/f$ de l'AOP est généralement négligeable devant le bruit thermique. Ainsi, pour calculer la d.s.p. du signal en sortie d'un circuit à capacités commutées liée à l'échantillonnage d'une source de bruit large bande filtrée par un passe-bas du premier ordre, on calcul dans un premier temps la puissance de bruit P_o , puis, si la fonction de transfert en Z de cette source vers la sortie est $T(Z)$, la densité spectrale de bruit du circuit est alors donnée par

$$S(f) = P_o T(e^{+j\frac{2\pi f}{F_e}}) T(e^{-j\frac{2\pi f}{F_e}}).$$

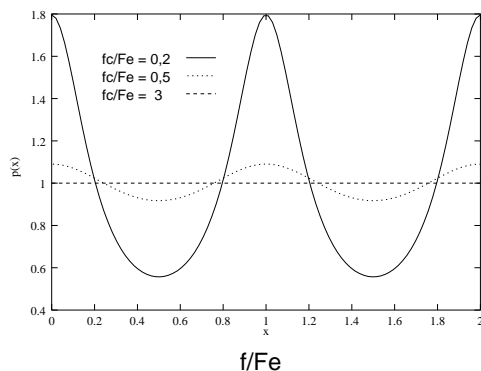


FIGURE 36 –

Densité spectrale $P(x) = S_y(f)/P_o$

● Exemple : l'intégrateur à capacités commutées

On se propose de déterminer les différentes d.s.p. de bruit en sortie de l'intégrateur à capacités commutées de la figure 37. Sur la phase P , il est caractérisé par la fonction de transfert temps discret

$$T(Z) = \frac{C1}{C} \frac{Z^{-1/2}}{1 - Z^{-1}}$$

avec en régime isochrone

$$T(j\omega) = \frac{C1}{C} \frac{1}{j \sin(\pi f / F_e)}.$$

- Calcul du bruit échantillonné
- Bruit dû aux commutateurs sur la phase I (figure 38)

On déduit de la figure 38 que

$$S1(f) = 2K_B T_K \mathcal{R}\{Z(f)\} = \frac{4K_B K_T R_{on}}{1 + (4\pi R_{on} C1 f)^2}.$$

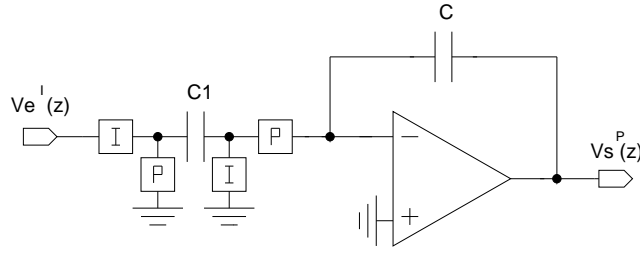


FIGURE 37 -

Intégrateur à capacités commutées

La puissance de bruit correspondante est

$$Po_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} S1(f) df = \frac{K_B T_K}{C1}.$$

La constante $RonC1$ étant largement inférieure à Te , ce bruit est blanc dans la bande $[-Fe/2, +Fe/2]$, et la d.s.p. en sortie de l'intégrateur est donnée par

$$S1(f) = \frac{Po_1}{Fe} |T(e^{j\omega Te})|^2 = \frac{K_B T_K}{Fe C1} \frac{(C1/C)^2}{4\sin^2(\pi \frac{f}{Fe})}$$

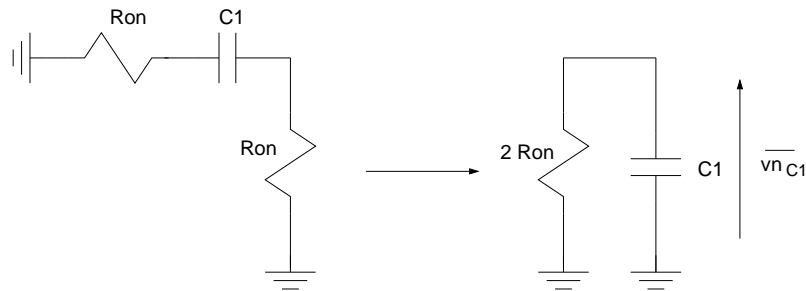


FIGURE 38 -

Bruit dû aux commutateurs échantillonnés sur C1 sur la phase I

- *Bruit dû aux commutateurs sur la phase P (figure 39)*

$$S2(f) = S1(f) = \frac{K_B T_K}{Fe C1} \frac{(C1/C)^2}{4\sin^2(\pi \frac{f}{Fe})}$$

- *Bruit dû à l'AOP sur la phase P (figure 40)*

La d.s.p. $Saop$ étant supposée constante, le bruit échantillonné sur $C1$ correspond à une puissance moyenne

$$Pn_2 = \frac{Saop}{4 Ron C1}.$$

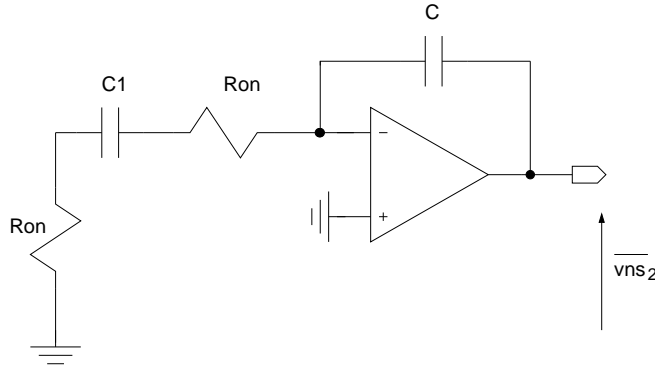


FIGURE 39 –

Bruit dû aux commutateurs échantillonnés sur C1 sur la phase P

En sortie, on aura

$$S3(f) = \frac{Saop}{Ron C1 Fe} \frac{(C1/C)^2}{4 \sin^2(\pi \frac{f}{Fe})}$$

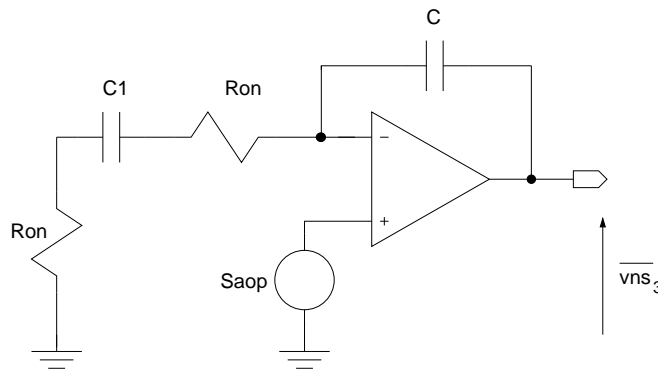


FIGURE 40 –

Bruit dû à l'AOP échantillonné sur C1 sur la phase P

- Calcul du bruit direct
- Bruit dû aux commutateurs sur la phase P

$$S4(f) = 4K_B T_K Ron \left(\frac{C1}{C}\right)^2 \frac{1}{1 + (f/f_1)^2} \text{ avec } f_1 = \frac{1}{4 \pi Ron C1}$$

- Bruit dû à l'AOP sur la phase P

$$S5(f) = Saop \left(1 + \frac{C1}{C}\right)^2 \frac{1 + (f/f_2)^2}{1 + (f/f_1)^2} \text{ avec } f_2 = \frac{1 + C1/C}{4 \pi Ron C1}$$

Références

- [1] F. de COULON. *"Théorie et traitement des signaux"*. Dunod, 1984.
- [2] M. FELDMANN. *"Théorie des réseaux et systèmes linéaires"*. Eyrolles, 1981.
- [3] C.A. GOBET and A. KNOB. "Noise analysis of switched capacitor networks". *IEEE Transaction on Circuit and System*, vol. 30(No. 1) :pp. 37–43, Jan. 1983.
- [4] P.R. GRAY and R.G. MEYER. *"Analysis and design of analog integrated circuits"*. John Wiley and sons, 1977.
- [5] H.A. HAUS and "Representation of noise in linear twoports". *Proceedings of the IRE*, pages pp. 69–74, Jan. 1960.
- [6] A. PAPOULIS. *"Probability, random variables and stochastic processes"*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1965.
- [7] P.A. PARATTE and P. ROBERT. *"Systèmes de mesure "*. Dunod, 1986.
- [8] H. ROTHE and W. DAHLKE. "Theory of noisy fourpoles". *Proceedings of the IRE*, pages pp. 811–818, 1956.
- [9] A. VAN DER ZIEL. *"Noise in solid state devices and circuits"*. John Wiley and sons, 1986.