

Les cellules d'ordre un

R.C et MR.C

Table des matières

1	Introduction	2
2	Les cellules actives RC	2
2.1	La cellule à sortie non différentielle	2
2.1.1	Constitution	2
2.1.2	Equations de synthèse et calcul des composants	3
2.1.3	Sensibilités passives	3
2.1.4	Bruit	4
2.1.5	Prise en compte des spécifications de l'AOP	5
2.1.6	Prise en compte de la nature distribuée des résistances intégrées	7
2.2	Les cellules à sortie différentielle	9
3	Les cellules actives MRC	11
3.1	Constitution	11

1 Introduction

La cellule d'ordre un est utilisée en filtrage pour synthétiser un pôle réel négatif. Conceptuellement le pôle est généré à partir d'un intégrateur amorti représentable par le graphe de fluence de la *figure1*. Elle est ainsi caractérisée par la fonction de transfert

$$T(p) = \frac{Y_2/G_1}{1 + \frac{G_1}{C_1}p}$$

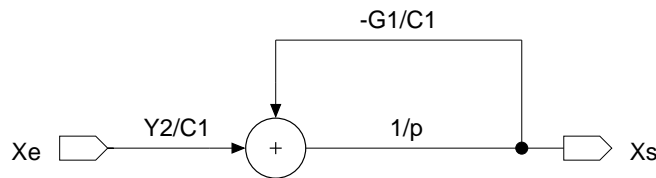


FIGURE 1 –

Graphe de fluence de la cellule d'ordre un

2 Les cellules actives RC

2.1 La cellule à sortie non différentielle

2.1.1 Constitution

Une cellule d'ordre un peut directement être synthétisée à partir d'un [intégrateur de Miller](#) (*figure2*). Le circuit ainsi réalisé est un montage inverseur ayant pour fonction de transfert

$$T(p) = \frac{Vs}{Ve} = -\frac{\frac{C_2}{C_1}p + \frac{G_2}{C_1}}{p + \frac{G_1}{C_1}}$$

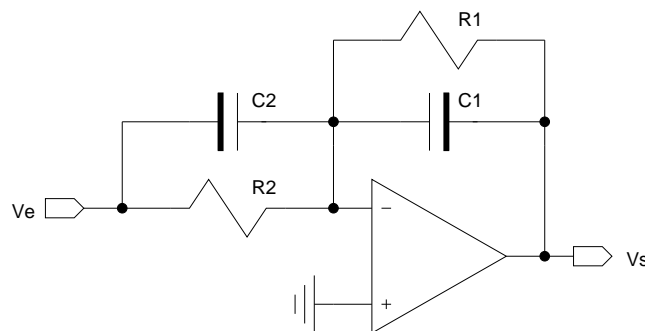


FIGURE 2 –

La cellule RC d'ordre un à sortie simple

2.1.2 Equations de synthèse et calcul des composants

- Pôles synthétisables

Par identification avec l'équation caractéristique $p + \omega_c$ (ω_c est la pulsation de coupure) on détermine l'équation de synthèse

$$\omega_c = \frac{1}{R_1 C_1}.$$

Tous les pôles situés sur l'axe réel négatif du plan de la variable complexe P correspondant à une stabilité inconditionnelle sont réalisables. Si on se donne la valeur de C_1 , on détermine

$$R_1 = \frac{1}{C_1 \omega_c}.$$

- Fonctions génériques synthétisables

Par identification directe avec les différentes fonctions génériques synthétisables, avec $G_i = 1/R_i$ on détermine les valeurs des composants de la *table 1*.

fonction	numérateur	G_2	C_2	conditions
passe-bas	$-K_1 \cdot \omega_c$	$G_1 \cdot K_1$	0	
passe-haut	$-K_2 \cdot p$	0	$K_2 \cdot C_1$	
quelconque	$-K_4 \cdot (a \cdot p + b)$	$K_4 \cdot b \cdot C_1$	$K_4 \cdot a \cdot C_1$	$a \cdot b > 0$

TABLE 1 –

Jeux de fonctions réalisables par la cellule à sortie simple

On notera que la fonction "égaliseur de phase" n'est pas synthétisable et que la fonction "quelconque" n'est réalisable que si les coefficients a et b du numérateur sont de même signe (si a et b sont négatifs la fonction est réalisée au signe près).

2.1.3 Sensibilités passives

La **sensibilité**

d'un paramètre P relative à un composant x_i étant définie par

$$S_{x_i}^P = \frac{\partial(\text{Log}P)}{\partial(\text{Log}x_i)},$$

pour le pôle, on détermine l'indice

$$S_{R_1, C_1}^{\omega_c} = -1.$$

Ainsi, une variation de 1% sur la résistance et le condensateur induit une variation de 1% sur la fréquence de coupure. Pour le numérateur, les indices de sensibilités dépendent de la fonction réalisée. Pour le passe bas on détermine

$$S_{R_1}^{K_1} = +1 \text{ et } S_{R_2}^{K_1} = -1,$$

et pour le passe-haut

$$S_{C_2}^{K_2} = +1 \text{ et } S_{C_1}^{K_2} = -1.$$

On notera que de part les **corrélations statistiques**

entre composants de même nature, l'erreur commise sur les constantes de gain peuvent être faibles puisque inférieures à 1% (erreur locale) alors que l'erreur intrinsèque sur la pulsation de coupure ne peut être guère inférieure à qqs 10% (erreur globale).

2.1.4 Bruit

Pour la détermination du **bruit**

, en prenant en compte le bruit résistif et la tension de bruit de l'amplificateur opérationnel, on peut considérer le modèle de calcul de la *figure 3*.

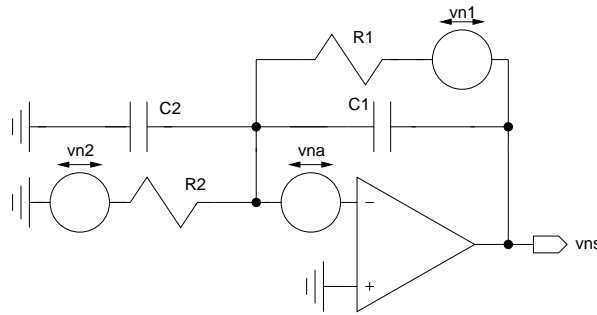


FIGURE 3 -

Modèle de calcul pour le bruit

Les différentes sources de bruit étant décorrélées, en termes de densités spectrales, la sortie s'exprime par

$$S_{ns} = S_{R_1} \cdot |H_{R_1}|^2 + S_{R_2} \cdot |H_{R_2}|^2 + S_a \cdot |H_a|^2$$

avec les fonctions de transfert

$$H_{R_1} = \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_c}}$$

$$H_{R_2} = \frac{-\frac{R_1}{R_2}}{1 + \frac{p}{\omega_c}}$$

et

$$H_a = \frac{(1 + \frac{R_1}{R_2})(1 + \frac{p}{\omega_a})}{1 + \frac{p}{\omega_c}} \text{ avec } \omega_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{C_1 + C_2}.$$

Ainsi, à partir de l'expression de l'intégrale

$$\int_0^{f_c} \frac{df}{1 + (\frac{f}{f_c})^2} \approx \int_0^{\infty} \frac{df}{1 + (\frac{f}{f_c})^2} = \frac{\pi}{2} f_c$$

la tension efficace de bruit inhérent, c'est à dire la tension efficace de bruit passif a

pour valeur

$$V_{snr}^2 \approx \frac{K_B T_K}{C_1} \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right).$$

2.1.5 Prise en compte des spécifications de l'AOP

- le modèle de calcul

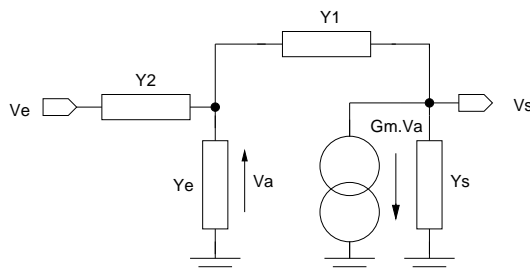


FIGURE 4 -

Modèle de calcul pour la prise en compte des imperfections de l'AOP

Dans le cadre de la microélectronique, l'amplificateur opérationnel est généralement de type "deux nœuds haute impédance"

, spécifié en terme de gain statique, de fréquence de transition et de marge de phase. Pour la prise en compte des non idéalités de l'élément actif, la cellule d'ordre RC est ainsi modélisable par le schéma de la *figure 4*. L'admittance parasite Y_e prend éventuellement en compte la capacité parasite d'entrée de l'AOP, les capacités parasites structurelles des condensateurs, ainsi que les résistances et les condensateurs d'injection d'autres signaux d'entrée sur le nœud de sommation, alors que l'admittance parasite Y_s modélise la résistance et la capacité de sortie de l'amplificateur ainsi que les diverses capacités et résistances chargeant éventuellement la cellule. Formellement, la fonction de transfert du montage est ainsi donnée par

$$\frac{V_s}{V_e} = -\frac{Y_2}{Y_1} \frac{1}{1 + \frac{Y_s + Y_1}{G_m - Y_1} \left(1 + \frac{Y_2}{Y_1} + \frac{Y_e}{Y_1}\right)}.$$

Pratiquement, la transconductance G_m de l'amplificateur opérationnel étant telle que $G_m \gg |Y_1|$, en posant

$$A_0 = \frac{G_m}{G_s + G_1} \text{ et } \omega_T = \frac{G_m}{C_s + C_1}$$

on peut écrire

$$\frac{V_s}{V_e} = -\frac{Y_2}{Y_1} \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{A_0} + \frac{p}{\omega_T}\right) \left(1 + \frac{Y_2}{Y_1} + \frac{Y_e}{Y_1}\right)}$$

soit

$$\frac{V_s}{V_e} = -\frac{(G_2 + C_2 p) \frac{\omega_T}{C_1 + C_2 + C_e}}{p^2 + \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2 + C_e} \omega_T + \frac{\omega_T}{A_0} + \frac{G_1 + G_2 + G_e}{C_1 + C_2 + C_e}\right) p + \left(G_1 + \frac{G_1 + G_2 + G_e}{A_0}\right) \frac{\omega_T}{C_1 + C_2 + C_e}}.$$

On notera que cette formule est strictement identique à la formule obtenue en modélisant l'amplificateur opérationnel par un modèle source de tension commandée à un pôle, de gain statique A_0 et de fréquence de transition F_T . Ainsi, les quantités $G_s + G_1$ et $C_s + C_1$ étant respectivement définies comme la résistance effective et la capacité effective de sortie, indépendamment de l'architecture, le paramètre A_0 peut être identifié avec le gain statique de l'amplificateur opérationnel. Par contre, au sens stricte, ω_T ne peut être confondue avec la pulsation de transition que pour les amplificateurs à un nœud haute impédance. Pour les architectures à deux nœuds, l'identification ne peut être réalisée que pour les dispositifs à [compensation capacitive](#)

avec la capacité de compensation égale à la capacité de charge, pour les autres types de compensation, elle ne peut être qu'approximative. D'autre part, une prise en compte de la marge de phase MP peut empiriquement être effectuée en remplaçant le paramètre ω_T par

$$\omega'_T = \frac{\omega_T}{1 + \cot(MP)}.$$

Ainsi, compte tenue des spécifications de l'amplificateur opérationnel :

- **pour le passe-bas**

$$\frac{V_s}{V_e} = - \frac{\frac{K_1 \omega_c \omega_T}{1 + \frac{C_e}{C_1}}}{p^2 + \left(\frac{\omega_T}{1 + \frac{C_e}{C_1}} + \frac{\omega_T}{A_0} + \omega_c \frac{1 + K_1 + \frac{G_e}{G_1}}{1 + \frac{C_e}{C_1}} \right) p + \omega_T \omega_c \left(\frac{1}{1 + \frac{C_e}{C_1}} + \frac{1 + K_1}{A_0} \left(1 + \frac{G_e}{G_1(1 + K_1)} \right) \right)}$$

pour une fréquence de fonctionnement $F \ll F_T$, et

$$\frac{V_s}{V_e} = - \frac{K_1}{1 + \frac{1 + K_1 + G_e/G_1}{A_0}}$$

en statique.

- **pour le passe-haut**

$$\frac{V_s}{V_e} = - \frac{\frac{K_2 \omega_T}{1 + K_2 + \frac{C_e}{C_1}} p}{p^2 + \left(K_2 \frac{\omega_T}{1 + K_2 + \frac{C_e}{C_1}} + \frac{\omega_T}{A_0} + \omega_c \frac{1 + \frac{G_e}{G_1}}{1 + K_2 + \frac{C_e}{C_1}} \right) p + \frac{\omega_T \omega_c}{1 + K_2 + \frac{C_e}{C_1}} \left(1 + \frac{1 + \frac{G_e}{G_1}}{A_0} \right)}$$

pour $F \ll F_T$, et

$$\frac{V_s}{V_e} = - \frac{K_2}{1 + \frac{1 + K_2 + C_e/C_1}{A_0}}.$$

avec $\omega_T = \infty$ et $\omega \gg \omega_c$

- **pour le quelconque**

$$\frac{V_s}{V_e} = - \frac{K_4 \omega_T \frac{b + ap}{1 + K_4 a + \frac{C_e}{C_1}}}{p^2 + \left(\frac{\omega_T}{1 + K_4 a + \frac{C_e}{C_1}} + \frac{\omega_T}{A_0} + \omega_c \frac{1 + \frac{K_4 b}{\omega_c} + \frac{G_e}{G_1}}{1 + K_4 a + \frac{C_e}{C_1}} \right) p + \frac{\omega_T \omega_c}{1 + K_4 a + \frac{C_e}{C_1}} \left(1 + \frac{1 + \frac{K_4 b}{\omega_c} + \frac{G_e}{G_1}}{A_0} \right)}$$

pour $F \ll F_T$, et

$$\frac{Vs}{Ve} = - \frac{\frac{K_4 b}{\omega_c}}{1 + \frac{1}{A_0} \left(1 + \frac{K_4 b}{\omega_c} + \frac{Ge}{C_1 \omega_c} \right)}$$

en statique.

Les spécifications de l'amplificateur opérationnel étant connues, un centrage de la fonction de transfert (fréquence de coupure et gain statique) peut être effectué, le dénominateur étant approximé par un polynôme du premier ordre par [l'algorithme de Friedman](#). On notera que pour des fréquences de transition proches des fréquences de coupure, le centrage n'est réellement effectif que pour le passe-bas.

- **justification à posteriori de l'approximation** $Gm \gg G_1$

Si l'amplificateur opérationnel utilisé est constitué de deux étages de gain respectif A_1 et A_2 , le condensateur C_L correspondant à "l'environnement capacitif de charge", on peut écrire successivement

$$Gm = A_2 g m_1$$

$$Gm \approx A_2 C_L \omega_T$$

$$Gm \ll A_2 C_L \omega_c$$

soit

$$Gm \ll A_2 G_1.$$

Ainsi, l'approximation utilisée est d'autant justifiée que le gain statique du second étage de l'amplificateur opérationnel est grand.

2.1.6 Prise en compte de la nature distribuée des résistances intégrées

En microélectronique, la résistance intégrée doit physiquement être considérée comme un [élément de ligne RC distribuée](#)

, et formellement caractérisée par la matrice admittance

$$[Y] = Yc \begin{pmatrix} \coth \sqrt{\tau p} & -\frac{1}{\sinh \sqrt{\tau p}} \\ -\frac{1}{\sinh \sqrt{\tau p}} & \coth \sqrt{\tau p} \end{pmatrix}$$

avec

$$Yc = \sqrt{\lambda p}, \lambda = C_T/R_T \text{ et } \tau = R_T C_T.$$

Les paramètres R_T et C_T sont respectivement la résistance totale et la capacité totale de l'élément de ligne RCD et τ la constante de temps correspondante. La résistance intégrée est modélisable par l'équivalence en Té de la [figure 5](#).

Ainsi, si on considère le modèle de calcul distribué de la cellule du premier ordre de [figure 6](#), l'amplificateur opérationnel étant idéal, on peut directement écrire

$$\frac{Vs}{Ve} = - \frac{Y_2 + C_2 p}{Y_1 + C_1 p} = - \frac{\frac{Yc_2}{\sinh \sqrt{\tau_2 p}} + C_2 p}{\frac{Yc_1}{\sinh \sqrt{\tau_1 p}} + C_1 p}$$

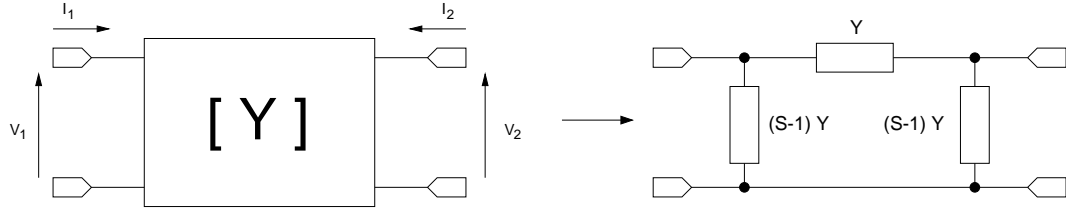


FIGURE 5 -

Equivalence en Té de la résistance intégrée

$$S = \cosh \sqrt{\tau p} \text{ et } Y = \frac{Y_c}{\sinh \sqrt{\tau p}}$$

soit

$$\frac{V_s}{V_e} = - \frac{\sinh \sqrt{\tau_1 p}}{\sinh \sqrt{\tau_2 p}} \frac{\sqrt{\lambda_2 p} + \sinh \sqrt{\tau_2 p} C_2 p}{\sqrt{\lambda_1 p} + \sinh \sqrt{\tau_1 p} C_1 p}.$$

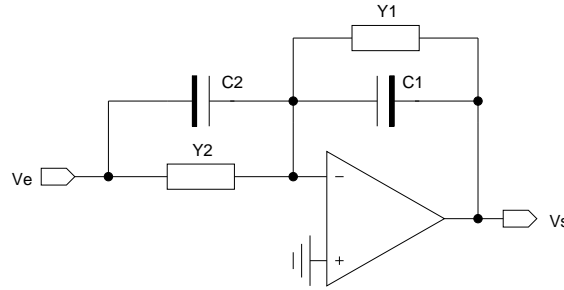


FIGURE 6 -

Modèle de calcul de la cellule du premier ordre distribuée

En régime harmonique, avec

$$\sqrt{j\tau\omega} = \sqrt{\frac{\tau}{2}\omega}(1+j) = \alpha(1+j)$$

et

$$\sqrt{j\lambda\omega} = \sqrt{\frac{\lambda}{2}\omega}(1+j) = \beta(1+j)$$

la fonction de transfert du circuit s'écrit

$$\frac{V_s}{V_e} = - \frac{\mathcal{A} + j\mathcal{B}}{\mathcal{C} + j\mathcal{D}}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \sinh(\alpha_1) \cos(\alpha_1) (\beta_2 - C_2 \sin(\alpha_2) \cosh(\alpha_2) \omega) - \sin(\alpha_1) \cosh(\alpha_1) (\beta_2 + C_2 \sinh(\alpha_2) \cos(\alpha_2) \omega) \\ \mathcal{B} &= \sinh(\alpha_1) \cos(\alpha_1) (\beta_2 + C_2 \sinh(\alpha_2) \cos(\alpha_2) \omega) - \sin(\alpha_1) \cosh(\alpha_1) (\beta_2 - C_2 \sin(\alpha_2) \cosh(\alpha_2) \omega) \\ \mathcal{C} &= \sinh(\alpha_2) \cos(\alpha_2) (\beta_1 - C_1 \sin(\alpha_1) \cosh(\alpha_1) \omega) - \sin(\alpha_2) \cosh(\alpha_2) (\beta_1 + C_1 \sinh(\alpha_1) \cos(\alpha_1) \omega) \\ \mathcal{D} &= \sinh(\alpha_2) \cos(\alpha_2) (\beta_1 + C_1 \sinh(\alpha_1) \cos(\alpha_1) \omega) - \sin(\alpha_2) \cosh(\alpha_2) (\beta_1 - C_1 \sin(\alpha_1) \cosh(\alpha_1) \omega). \end{aligned}$$

La fonction transcendante obtenue étant difficilement interprétable, à partir du développement limité

$$\frac{Y_c}{\sinh \sqrt{\tau p}} \approx \frac{1}{R_T} \frac{1}{1 + \frac{\tau}{6} p + \frac{\tau^2}{120} p^2}$$

pour une fréquence de fonctionnement telle que $\omega \ll \omega_d = 1/\tau$ la fonction de transfert peut être formellement approximée au premier ordre par la fonction de transfert

$$\frac{V_s}{V_e} \approx -\frac{R_{T1}}{R_{T2}} \frac{(\tau'_1 \tau'_2 \tau''_2) p^3 + \tau''_2 (\tau'_1 + \tau'_2) p^2 + (\tau'_1 + \tau'_2) p + 1}{(\tau'_1 \tau'_2 \tau''_1) p^3 + \tau''_1 (\tau'_1 + \tau'_2) p^2 + (\tau'_2 + \tau'_1) p + 1}$$

avec

$$\tau'_i = \tau_i/6 \text{ et } \tau''_i = R_{Ti} C_i.$$

La nature distribuée des résistances intégrées peut donc modifier profondément la réponse en fréquence de la fonction réalisée. Ainsi la fonction passe-haut s'écrivant

$$\frac{V_s}{V_e} = -\frac{\sinh \sqrt{\tau_1 p} C_2 p}{\sqrt{\lambda_1 p} + \sinh \sqrt{\tau_1 p} C_2 p} \approx -\frac{C_2}{C_1} \frac{p(p + \frac{1}{\tau'_1})}{p^2 + \frac{p}{\tau'_1} + \frac{1}{\tau'_1 \tau'_1}}$$

on constate que le passe-haut du premier ordre localisée est transformé approximativement en passe-haut du deuxième ordre présentant une surtension de coefficient de qualité $Q_0 \approx \sqrt{\tau'_1/\tau''_1}$. Quant à la fonction passe-bas, elle est transformée approximativement en fonction du troisième ordre. Si elle ne présente aucune surtension, il est toujours possible d'effectuer une prédistorsion de la fréquence de coupure F_c pour assurer l'affaiblissement désirée de -3dB. Comparativement à la fonction passe-bas localisée, la version répartie peut présenter une plus grande platitude en bande-passante et un affaiblissement renforcée en bande atténuée, elle peut ainsi quelquefois être utilisée en filtrage antirepliement sommaire, la largeur W des résistances pouvant être utilisée comme paramètre auxiliaire de centrage des spécifications de la cellule RCD (gain et T.P.G.).

2.2 Les cellules à sortie différentielle

De part le principe du [demi-circuit](#)

la cellule à sortie différentielle de la [figure 7](#) peut directement être générée par symétrie à partir de la cellule à sortie simple. Elle a pour fonction de transfert

$$\frac{V_{sd}}{V_{ed}} = \frac{V_{sp} - V_{sm}}{V_{ep} - V_{em}} = -\frac{C_2 p + \frac{G_2}{C_2}}{C_1 p + \frac{G_1}{C_1}}$$

Deux autres versions différentielles sont possibles. En effet, par croisement des entrées capacitives [figure 8](#) on synthétise une version différentielle réalisant la fonction de transfert

$$\frac{V_{sd}}{V_{ed}} = \frac{V_{sp} - V_{sm}}{V_{ep} - V_{em}} = +\frac{C_2 p - \frac{G_2}{C_2}}{C_1 p + \frac{G_1}{C_1}}$$

et par croisement des entrées résistives on synthétise une version différentielle réalisant la fonction de transfert

$$\frac{V_{sd}}{V_{ed}} = \frac{V_{sp} - V_{sm}}{V_{ep} - V_{em}} = -\frac{C_2 p - \frac{G_2}{C_2}}{C_1 p + \frac{G_1}{C_1}}$$

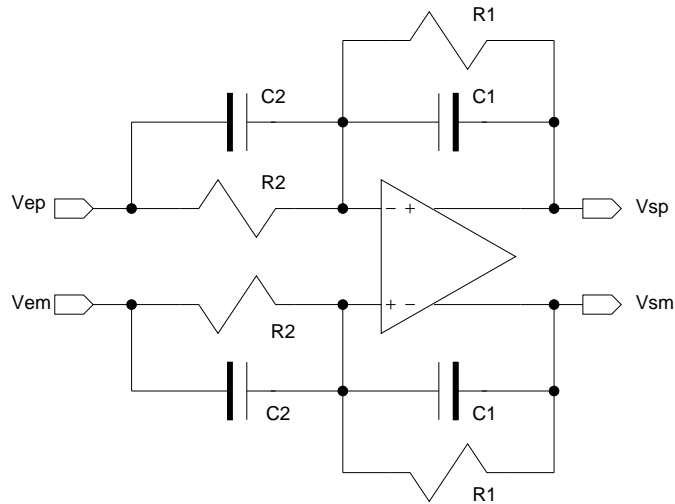


FIGURE 7 –

Une première cellule RC à sortie différentielle

La génération des fonctions "égaliseur de phase" et "quelconque" de la *table 2* et de la *table 3* devient ainsi possible. On notera que tous les signes des constantes de gain peuvent être modifiés par permutation des sorties.

fonction	numérateur	G_2	C_2	conditions
passé-bas	$-K_1 \cdot \omega_c$	$G_1 \cdot K_1$	0	
passé-haut	$+K_2 \cdot p$	0	$K_2 \cdot C_1$	
égaliseur de phase	$+K_3 \cdot (p - \omega_c)$	$K_3 \cdot G_1$	$K_3 \cdot C_1$	
quelconque	$+K_4 \cdot (a \cdot p + b)$	$K_4 \cdot b \cdot C_1$	$K_4 \cdot a \cdot C_1$	$a > 0$ et $b < 0$

TABLE 2 –

Jeu de fonctions réalisables par la cellule à entrées capacitives croisées

fonction	numérateur	G_2	C_2	conditions
passé-bas	$+K_1 \cdot \omega_c$	$G_1 \cdot K_1$	0	
passé-haut	$-K_2 \cdot p$	0	$K_2 \cdot C_1$	
égaliseur de phase	$-K_3 \cdot (p - \omega_c)$	$K_3 \cdot G_1$	$K_3 \cdot C_1$	
quelconque	$-K_4 \cdot (a \cdot p + b)$	$K_4 \cdot b \cdot C_1$	$K_4 \cdot a \cdot C_1$	$a > 0$ et $b < 0$

TABLE 3 –

Jeu de fonctions réalisables par la cellule à entrées résistives croisées

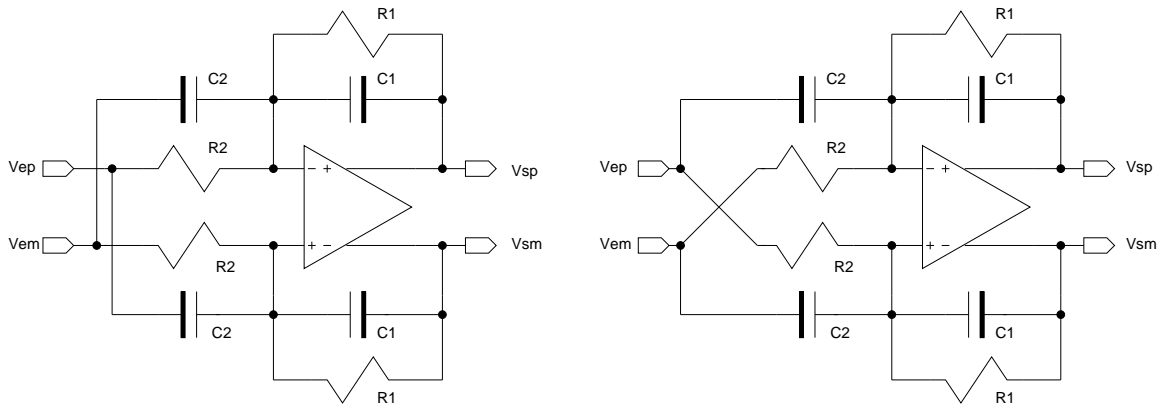


FIGURE 8 –

Deux autres versions à sortie différentielle

3 Les cellules actives MRC

3.1 Constitution

Une cellule MRC non différentielle est directement obtenue en remplaçant les résistances par un transistor MOS (de type P ou N). La tension V_G est la tension de réglage permettant l'obtention de la valeur résistive désirée. En terme d'éléments parasites [apportés par les transistors](#)

les effets distribués peuvent formellement être pris en compte comme pour les résistances, les capacités extrinsèques localisées CDX et CSX sont sans influence si le gain statique de l'amplificateur opérationnel est suffisamment grand. En effet, les capacités CSX sont court-circuitées par la masse virtuelle de l'AOP et les capacités CDX sont attaquées par une source de tension idéale. La seule influence est due la capacité active localisée CSD normalement négative puisque les tensions de repos V_{DS} des MOS sont normalement nulles. Cette capacité peut être intégrée dans la valeur de $C1$ pour $CSD1$ et éventuellement dans $C2$ pour $CSD2$ ou peut physiquement être compensée par un condensateur en parallèle sur le transistor MOS. Dans les deux cas la compensation ne peut être parfaite compte tenu des dispersions technologiques fortement décorréélées entre la capacité active et la capacité passive. On notera que pour le passe-bas, l'erreur "haute fréquence" introduite par $CSD2$ est normalement négligeable. L'obtention des différentes cellules différentielles est directe. Le MOS résistif étant par nature un dispositif fortement non-linéaire, il est souvent impératif d'utiliser une cellule différentielle pour s'affranchir des distorsions harmoniques de rang pair.

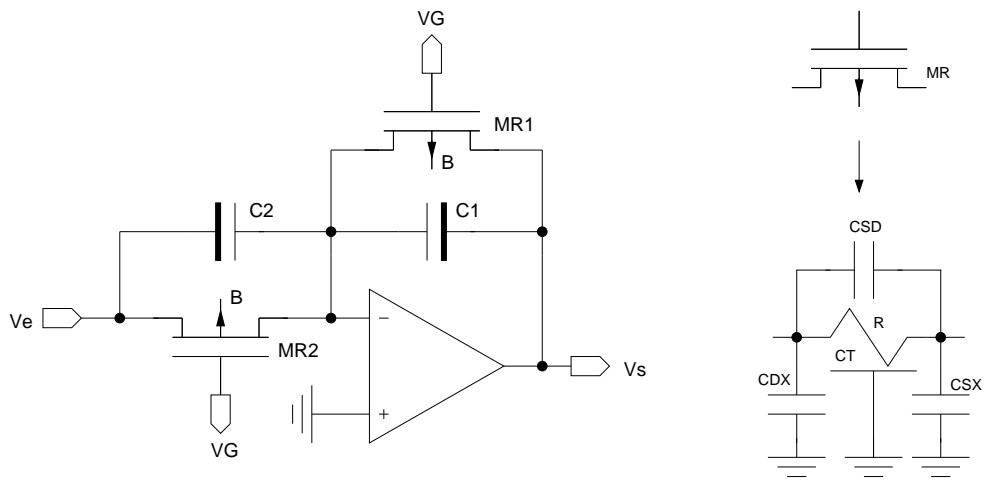


FIGURE 9 –

La cellule MRC d'ordre un à sortie simple

Références