

Aspects statistiques de la conception analogique

Table des matières

1	Introduction	2
2	Eléments d'analyse statistique	2
2.1	Concepts et définitions élémentaires	2
2.2	Fonctions de densité de probabilité usuelles	4
2.3	Système de variables aléatoires	5
2.4	Caractéristiques numériques des fonctions de variables aléatoires	7
2.5	Formule des transmissions des moments	7
2.6	Composantes principales d'un système de variables aléatoires	8
2.6.1	Définition	8
2.6.2	Calculs	8
3	Techniques d'analyse	9
3.1	L'analyse du pire-cas	9
3.2	L'analyse de Monte-carlo	9
4	Modèles statistiques pour la conception analogique	10
4.1	L'erreur globale	10
4.1.1	Origines	10
4.1.2	Modélisation	11
4.2	L'erreur locale ou erreur d'appariement	11
4.2.1	Origines	11
4.2.2	Les règles d'appariement	11
4.2.3	Modélisation	12

1 Introduction

Pour concevoir un circuit intégré analogique de qualité industrielle, il faut non seulement dimensionner les différents composants électroniques (résistances, condensateurs, transistors, ...) en vue de satisfaire les spécifications électriques nominales demandées, mais il faut également garantir que ces spécifications soient satisfaites compte tenu des inévitables fluctuations des paramètres technologiques, c'est à dire compte tenu des dispersions ou tolérances de fabrication affectant inévitablement les différents types de composants. De ce point de vue, la conception analogique est un processus statistique, ce qui implique la connaissance des facteurs susceptibles d'affecter statistiquement les performances électriques d'un dispositif afin, si possible de les modéliser pour pouvoir les analyser et ainsi éventuellement les prendre en compte lors de la phase de dimensionnement.

2 Eléments d'analyse statistique

2.1 Concepts et définitions élémentaires

Considérons à type d'exemple une résistance discrète de $10K\Omega$. Compte tenu des imprécisions dues aux procédés de fabrication, cette résistance est commercialisée typiquement avec une tolérance de 5%, c'est dire que sa valeur effective est garantie pour être comprise entre 9500Ω et 10500Ω . Expérimentalement, si nous considérons un grand nombre d'échantillons, la dispersion peut être caractérisée par l'histogramme de la *figure 1*, l'axe des abscisses étant divisé en intervalles réguliers de $\Delta R = 100\Omega$ et l'axe des ordonnées correspondant au nombre de résistances $N(R_i)$ compris dans l'intervalle $[R_i, R_i + 100\Omega]$.

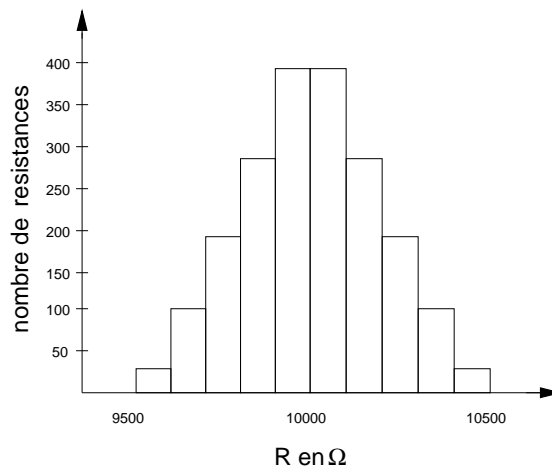


FIGURE 1 –

Histogramme d'une résistance à valeurs discrètes

Si, d'une part N étant le nombre total de composants, on prend en ordonnée la variable

$$f(R_i) = \frac{N(R_i)}{N \Delta R},$$

l'aire de l'histogramme normalisé devient égal à l'unité avec

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N N(R_i) = 1.$$

Si d'autre part on fait tendre le nombre total N de résistances vers l'infini et l'intervalle ΔR vers zéro, l'histogramme normalisé $f(R_i)$ se transforme en une courbe continue (figure 2) correspondant à la densité de probabilité $p(R)$ avec

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(R) dR = 1$$

telle que la fraction du nombre total de résistances comprises dans l'intervalle Ra à Rb est donnée par

$$\int_{Ra}^{Rb} p(R) dR$$

ou en d'autres termes, que la probabilité qu'une résistance soit comprise entre les valeurs Ra et Rb est donnée par

$$Prob.(Ra < R < Rb) = \int_{Ra}^{Rb} p(R) dR.$$

Dans de très nombreuses applications pratiques on n'a pas besoin d'une caractéris-

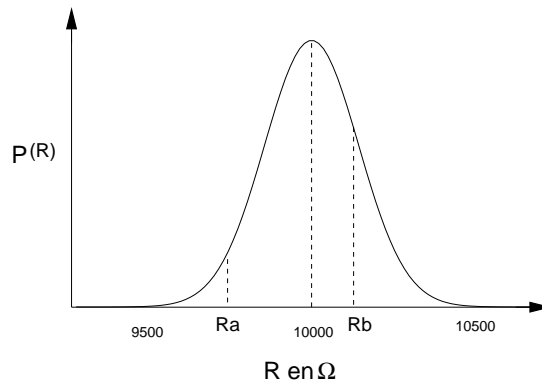


FIGURE 2 –

Densité de probabilité d'une résistance à valeurs continues

tique aussi complète qu'est la densité de probabilité, et il suffit de connaître certaines caractéristiques numériques donnant les traits essentiels de la répartition considérée. Ces caractéristiques numériques sont essentiellement

- la moyenne ou espérance mathématique discrète :

$$E[R] = \mu(R) = \frac{\sum_{i=1}^N R_i}{N}$$

- la moyenne ou espérance mathématique continu :

$$E[R] = \mu(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} R p(R) dR$$

- la variance ou moment initial d'ordre 2 discret :

$$VAR[R] = \sigma^2(R) = \frac{\sum_{i=1}^N (R_i - \mu(R))^2}{N}$$

- la variance ou moment initial d'ordre 2 continu :

$$VAR[R] = \sigma^2(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} (R - \mu(R))^2 p(R) dR$$

- l'écart type $\sigma(R)$ issu directement de la variance.

2.2 Fonctions de densité de probabilité usuelles

● Fonction de densité normale

La plupart des phénomènes aléatoires naturels ont pour origine la superposition d'un grand nombre de phénomènes aléatoires indépendants et possédant la même loi de probabilité. Par le théorème de la limite centrale [5], la loi résultante tend asymptotiquement vers une loi normale. De ce fait la loi de densité normale ou gaussienne (*figure 3*) est pratiquement toujours utilisée. Elle est donnée par

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-0,5\left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x}\right)^2\right).$$

Le calcul effectué à partir de la répartition normale

$$P(x) = \Phi^*\left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x}\right) \text{ avec } \Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

montre que

- 99,7% des amplitudes instantanées sont comprises dans l'intervalle $\pm 3\sigma$
- 95% des amplitudes instantanées sont comprises dans l'intervalle $\pm 2\sigma$
- 68% des amplitudes instantanées sont comprises dans l'intervalle $\pm \sigma$
- 50% des amplitudes instantanées sont comprises dans l'intervalle $\pm \frac{2\sigma}{3}$.

On notera que par convention la tolérance correspond à trois écarts types.

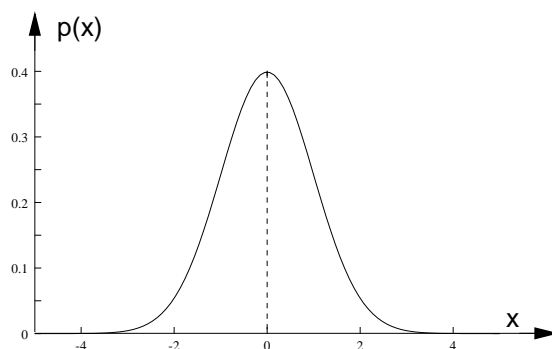


FIGURE 3 –

Densité de probabilité gaussienne avec $\mu_x = 0$ et $\sigma_x = 1$

● Fonction de densité uniforme

Pour cette fonction de densité, la gamme de toutes les valeurs possibles est distribuée avec une égale probabilité. Ce type de distribution (*figure 4*), quelquefois utilisée, a pour moyenne

$$\mu(x) = \frac{a + b}{2}$$

et pour écart type

$$\sigma(x) = \frac{b - a}{2\sqrt{3}}.$$

Ainsi,

- 86,6% des amplitudes instantanées sont comprises dans l'intervalle $\pm 3\sigma$
- 57,7% des amplitudes instantanées sont comprises dans l'intervalle $\pm 2\sigma$
- 28,8% des amplitudes instantanées sont comprises dans l'intervalle $\pm \sigma$
- 19,2% des amplitudes instantanées sont comprises dans l'intervalle $\pm \frac{2\sigma}{3}$.

On notera que par convention la tolérance correspond à l'ensemble des valeurs possibles, ce qui correspond à un écart type de valeur $\frac{\text{tolerance}}{\sqrt{3}}$.

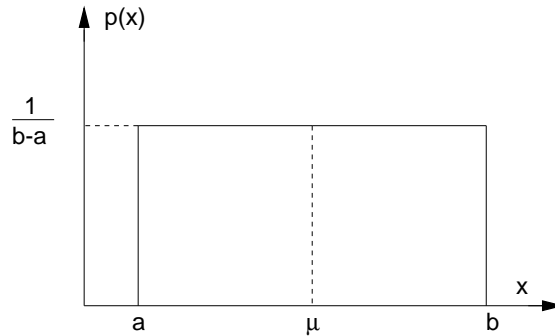


FIGURE 4 –

Densité de probabilité uniforme

2.3 Système de variables aléatoires

● Diagramme de dispersion

Chaque paramètre physique d'un composant et chaque composant d'un circuit électronique étant une variable aléatoire, celui ci forme un système de variables en interdépendance. Ainsi, si on considère un système aléatoire à deux variables X et Y et si on représente chaque réalisation X_i de X et chaque réalisation Y_i de Y dans un même système d'axes on détermine un nuage de points (*figure 5*) appelé diagramme de dispersion traduisant graphiquement l'interdépendance éventuelle des variables. Quantitativement, si on considère les courbes de régression, c'est à dire, la courbe qui "ajuste au mieux" (par exemple au sens de la moyenne ou au sens des moindres carrés) les valeurs de Y à partir de celles de X et inversement, on observe trois configurations typiques

- 1- la dépendance fonctionnelle : à chaque valeur X_i correspond une valeur déterminée de Y_i et réciproquement
- 2- la corrélation : la connaissance de la valeur prise par X apporte une information sur la valeur de Y
- 3- l'indépendance : la connaissance de la valeur prise par X n'apporte aucune information sur la valeur de Y

● Covariance et corrélation

En terme de caractéristique numérique, une mesure de l'interdépendance et de la dispersion entre les différentes variables aléatoires est donnée par la covariance qui s'exprime sous forme discrète par

$$K_{XY} = E[XY] = \sum_i \sum_j (X_i - \mu(X))(Y_i - \mu(Y))$$

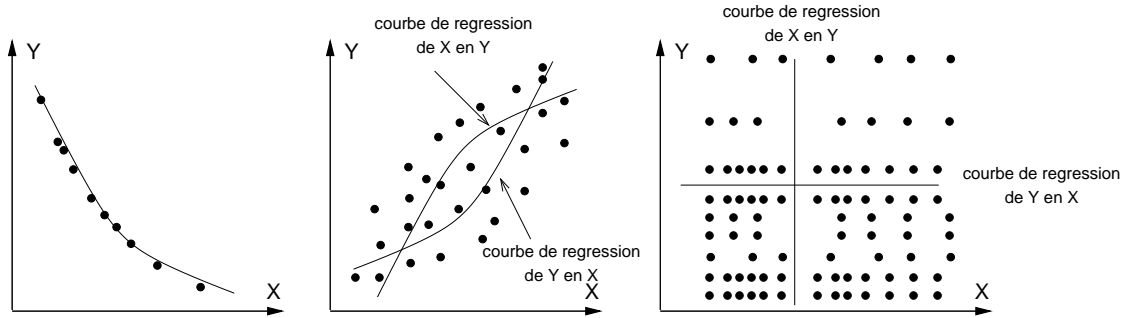


FIGURE 5 -

Diagrammes de dispersion montrant
- une liaison fonctionnelle
- une corrélation
- une indépendance

et sous forme continue par

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu(x))(y - \mu(y)) p(xy) dx dy.$$

Pour caractériser uniquement la liaison, on définit une deuxième caractéristique qui est le coefficient de corrélation

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma(x)\sigma(y)} = E\left[\frac{(x - \mu(x))(y - \mu(y))}{\sigma(x)\sigma(y)}\right].$$

Lorsque le coefficient de corrélation est égal à l'unité, les variables X et Y sont liées fonctionnellement, lorsque $r_{xy} = -1$ la variable Y est minimum (maximum) lorsque X est maximum (minimum), et enfin lorsque $r_{xy} = 0$, les deux variables sont indépendantes. Lorsque le système comporte plus de deux variables aléatoires, il est commode de représenter les caractéristiques numériques sous forme matricielle. On définit ainsi

- la matrice de covariance :

$$[K] = \begin{pmatrix} K_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{21} & K_{22} & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{n1} & K_{n2} & K_{n3} & \cdot & K_{nn} \end{pmatrix}$$

- la matrice de corrélation :

$$[R] = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{21} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{31} & r_{32} & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n1} & r_{n2} & r_{n3} & \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

De part la définition de la covariance $K_{ij} = K_{ji}$, les éléments de la matrice de covariance et de corrélation sont symétriques par rapport à la diagonale principale.

2.4 Caractéristiques numériques des fonctions de variables aléatoires

Les quelques caractéristiques numériques qui suivent, ont un large champ d'application et sont facilement démontrables par application directe des définitions.

- Variable non aléatoire

$$E[c] = c \text{ et } VAR[c] = 0$$

- Mise en facteur d'une variable aléatoire

$$E[cX] = c E[X] \text{ et } VAR[cX] = c^2 VAR[X]$$

- Somme de n variables aléatoires

$$E[\sum_{i=1}^n X_i] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$$

Pour la variance, si on considère la variable aléatoire centrée $Z = X + Y$, par définition on peut écrire

$$\begin{aligned} VAR[X + Y] &= VAR[Z] = E[Z^2] = E[X^2] + 2E[XY] + E[Y^2] \\ VAR[X + Y] &= VAR[X] + VAR[Y] + 2K_{XY}. \end{aligned}$$

En généralisant

$$VAR[\sum_{i=1}^n X_i] = \sum_{i=1}^n VAR[X_i] + 2 \sum_{i < j} K_{ij}.$$

2.5 Formule des transmissions des moments

Si la fonction de variables aléatoires $Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est non linéaire, mais peut être considérée comme variant peu autour de son espérance mathématique, on peut effectuer un développement en série de Taylor. Les dérivées partielles étant évaluées au point de développement, on obtient au premier ordre

$$Y \approx f(\mu(x_1), \dots, \mu(x_n)) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

En terme de variance, la seule variable aléatoire étant dx_i , on écrit

$$VAR[Y] = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 VAR[x_i] + 2 \sum_{i=1, j+1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} K_{ij},$$

et en terme de coefficient de corrélation, on écrit la formule dite des transmissions des moments

$$\sigma^2(Y) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \sigma^2(x_i) + 2 \sum_{i=1, j+1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} r_{ij} \sigma(x_i) \sigma(x_j).$$

Cette formule est très importante en conception, puisqu'elle peut fournir un lien analytique entre les performances électriques d'un dispositif et les caractéristiques numériques statistiques de ses composants.

2.6 Composantes principales d'un système de variables aléatoires

2.6.1 Définition

L'analyse des composantes principales (ACP) est une opération mathématique (changement de base) qui transforme linéairement un nombre de variables éventuellement corrélées en un nombre de variables décorrélés appelées composantes principales [3]. Ces nouvelles composantes sont telles que la première prend en compte la majeure partie des propriétés statistiques du système, que la seconde prend en compte la majeure partie des propriétés restantes et ainsi de suite. De ce fait un jeu réduit de composantes est généralement représentatif du système d'origine, sans perte notable d'informations statistiques. L'analyse des composantes principales est directement réalisée soit sur la matrice de covariance ou plus souvent, sur la matrice de corrélation.

2.6.2 Calculs

Considérons un système de variables aléatoires caractérisé par la matrice d'observation

$$[P] = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & \cdot & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & \cdot & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{N1} & p_{N2} & \dots & \cdot & p_{Nn} \end{pmatrix}.$$

correspondant par exemple aux n vecteurs d'observation \vec{P}_1^T à \vec{P}_n^T de dimension N issus de N mesures effectuées sur les n paramètres clefs P_1 à P_n caractérisant un dispositif analogique. Typiquement ce seront les paramètres électriques des différents types de transistor, des différents types de résistance et des différents types de condensateur. Chaque variable p_{ij} étant normalisé avec

$$p'_{ij} = \frac{p_{ij} - \mu(P_i)}{\sigma(P_i)},$$

à partir de la matrice de corrélation (symétrique) correspondante

$$[R] = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \dots & \cdot & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & \dots & \cdot & r_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & \cdot & 1 \end{pmatrix},$$

le vecteur des composantes principales \vec{C}^T est obtenu formellement par [4]

$$\vec{C}^T = [\Lambda]^{-1/2} [B]^{-1} \vec{P}'^T.$$

La matrice $[\Lambda]$ est la matrice diagonale des valeurs propres de la matrice de corrélation, $[B]$ est la matrice des vecteurs propres correspondants, et \vec{P}'^T est le vecteur des paramètres observés normalisés. Les valeurs propres étant classées par valeurs décroissantes, un nombre réduit de nouvelles composantes décorrélées permet généralement une bonne caractérisation statistique du système de variables aléatoires initial.

3 Techniques d'analyse

Si la formule des transmissions de moments est susceptible de fournir un lien analytique entre un indice de performance et les caractéristiques statistiques numériques des différents composants, son application est limitée à des dispositifs simples, typiquement des circuits composés de quelques transistors. En effet, il est très difficile et souvent pratiquement impossible d'explicitier analytiquement la relation fonctionnelle non linéaire correspondante, par exemple la relation entre la fréquence de coupure d'un filtre et le facteur de transconductance d'un des transistors d'un des amplificateurs opérationnels. Il est donc souvent nécessaire de mettre en œuvre des techniques informatiques basées sur la simulation électrique. Pour ce faire le concepteur a essentiellement à sa disposition deux techniques, l'analyse du pire-cas et l'analyse de Monte-carlo.

3.1 L'analyse du pire-cas

C'est la technique la plus simple à mettre en œuvre, puisque à partir d'un simulateur électrique de type [SPICE](#)

, pour un circuit composé de m composants on détermine l'espace de dispersion de dimension m , en considérant les 2^m cas extrêmes correspondant à toutes les combinaisons de valeurs minimum et valeurs maximum des m composants généralement données à $\pm 3\sigma$. Quoique souvent utilisée cette technique a un intérêt très limité en conception analogique puisque d'une part les valeurs minimum et maximum disponibles correspondent à des mesures effectuées sur des composants de dimensions "moyennes" polarisés arbitrairement (typiquement $V_{GS} = V_{DS} =$ tension d'alimentation pour les transistors MOS) et que d'autre part tous les paramètres étant considérés comme statistiquement indépendants, lors de la simulation la prise en compte de combinaisons impossibles de certaines valeurs de paramètres gonfle inconsidérément l'espace de dispersion (*figure 6*) et conduit à s'imposer des contraintes de conception très conservatives.

3.2 L'analyse de Monte-carlo

L'analyse de Monte-carlo consiste à échantillonner aléatoirement la valeurs des composants (ou plus exactement les paramètres des modèles correspondants) à l'intérieur de leur gamme de tolérance et ensuite à évaluer l'indice (ou les indices) de performance concerné. L'opération est réalisée un grand nombre de fois, et les caractéristiques numériques statistiques sont enfin calculées. Si les corrélations ne sont pas prise en compte (Monte-carlo standard : *figure 6*) cette technique conduit également à un gonflement de l'espace de dispersion. Par contre, si la matrice de corrélation des paramètres électriques de simulation est connue, après détermination des valeurs propres et des vecteurs propres correspondants, l'analyse par les composantes principales permet, en partant de la génération d'un jeu de l variables aléatoires C_1 à C_l gaussiennes et indépendantes, d'obtenir par calcul les n paramètres normalisés P'_1 à P'_n avec

$$\vec{P}'^T = [B] [\Lambda]^{1/2} \vec{C}^T.$$

Ce faisant, selon la précision des modèles statistiques utilisés, il est possible d'effectuer une analyse de Monte-carlo relativement fiable [1],

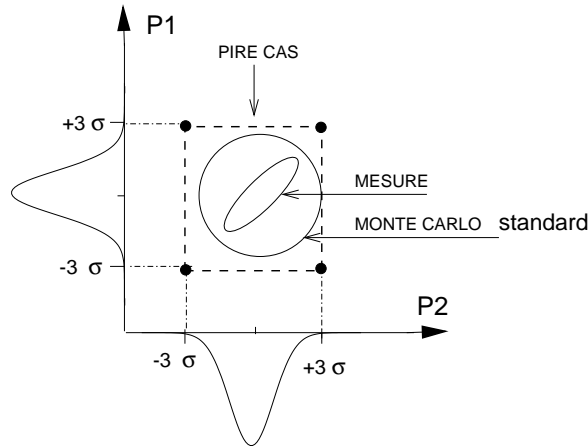


FIGURE 6 –

Diagrammes de dispersion entre deux paramètres physiques

4 Modèles statistiques pour la conception analogique

Deux types d'erreur de conception sont susceptibles d'affecter la précision de tout composant intégré. La première, commune à tous les mêmes composants d'un circuit est qualifiée d'erreur globale et la seconde, beaucoup plus petite et qui modifie les valeurs des composants de même nature du circuit est qualifiée d'erreur locale. Ces deux types d'erreur affectant généralement des indices de performance différents conduisent à deux types de modélisation et deux types d'analyse différents.

4.1 L'erreur globale

4.1.1 Origines

L'erreur globale a essentiellement pour origines, la dérive dans le temps des réglages des différents équipements servant à la fabrication des circuits intégrés qui probabilise l'espace des valeurs prises par les différents paramètres physiques selon le lot de fabrication et la tranche de silicium (wafer) considéré. Typiquement, elle introduit des écarts entre cotes dessinées et cotes physiquement réalisées, des variations d'épaisseur d'oxyde, des modifications dans les concentrations de dopage, Elle conduit à des écarts de valeur entre paramètres généralement guère inférieurs à 10% et affecte de la même manière tous les composants de même nature d'un circuit intégré. Ainsi, au sens global, la valeur moyenne de la tension de seuil de tous les transistors de type N ou la résistivité des résistances polysilicium d'un même circuit auront des caractéristiques numériques statistiques identiques.

En termes d'effet sur les performances, l'erreur globale se traduit par des variations sur les gains statiques des [amplificateurs opérationnels](#)

sur leur temps d'établissement, sur les fréquences de coupure des filtres temps continu, Elle ne peut être compensée que par des réglages internes ou externes au circuit et doit être prise en compte en utilisant des règles de conception conservatives donnant des marges de sécurité suffisantes.

4.1.2 Modélisation

En termes de modélisation tous les mêmes paramètres d'un même circuit sont caractérisés par le même écart type σ_{glob} et la même valeur moyenne μ_{glob} . Deux types de configuration peuvent se présenter au concepteur [2] [4]. Dans la première, toutes les variables du paramètre sont statistiquement indépendantes, soit parce que les modèles statistiques ne font intervenir que des paramètres statistiquement suffisamment significatifs et non corrélés [8] ou tout simplement parce que ces coefficients n'ont pas été fournis. Dans ce cas, une valeur de paramètre particulière est donnée formellement par

$$P_{glob}(i) = \mu_{glob} + \sigma_{glob} A_i$$

Le paramètre A_i un nombre aléatoire gaussien centré à l'origine et d'écart type unité. Quant à la seconde configuration elle correspond au cas où les coefficients de corrélations des variables du paramètre sont donnés. Dans ce cas, de part l'analyse des composantes principales, une valeur de paramètre particulière est donnée formellement par

$$P_{glob}(i) = \mu_{glob} + \sigma_{glob} \sum_j B_j C_j.$$

Les coefficients B_j sont déterminées à partir de la matrice de corrélation et les paramètre C_j sont des nombres aléatoires gaussiens centrés à l'origine et d'écart type unité.

4.2 L'erreur locale ou erreur d'appariement

4.2.1 Origines

Cette erreur de conception est également issue des différentes phases d'intégration, elle a essentiellement pour origine la granularité des matériaux, les défauts de surface des semi-conducteurs... . Probabilisant les disparités entre les mêmes paramètres physiques des composants de même nature d'un même circuit, elle est souvent qualifiée d'erreur d'appariement. Elle est d'un ou de deux ordres de grandeur plus petite que l'erreur globale. Ainsi l'erreur d'appariement entre les tensions de seuil de deux transistors MOS de type N est de l'ordre du mV, alors que entre deux tranches de silicium elle est de l'ordre du 0,1V. En termes d'indices de performance, elle affecte les indices de "symétrie", typiquement la tension de décalage, les gains de mode commun et de conversion des AOP, la linéarité des circuits, Irréductible par réglage, elle fixe la précision ultime des dispositifs de précision tels que les convertisseurs de données, les comparateurs, les générateurs de tensions de référence. En termes de modélisation, elle est plus difficile à modéliser que l'erreur globale puisqu'elle dépend de la nature, des dimensions, de la forme, du point de fonctionnement, et de la position des composants. Toutefois, un certain nombre de règles de conception élémentaires peuvent permettre de la réduire à des niveaux compatibles avec les précisions généralement requises pour la réalisation des différentes fonctions utilisées pour le traitement du signal analogique (souvent < 1%).

4.2.2 Les règles d'appariement

Ces règles ont pour but de s'affranchir des erreurs systématiques de conception en profitant des corrélations spatiales. Pour ce faire, les composants à appairer doivent impérativement répondre à un certain nombre de règles de conception qui conduiront à l'utilisation de techniques de [dessin de masques](#) appropriées [7] :

- même forme et même dimension

- distance minimum
- même orientation
- géométrie commune centrée
- même effets de bord (même environnement)
- même température
- dimensions non minimum.

4.2.3 Modélisation

- Prise en compte des fluctuations périphériques décorrélées [7] :

Considérons l'intégration d'un dispositif rectangulaire de longueur L et de largeur W (figure 7). Après correction des erreurs systématiques, la longueur et la largeur seront entachées d'une erreur aléatoire résiduelle de valeur moyenne nulle dL et dW . Du fait du moyennage statistique sur L (suffisamment grand), la valeur quadratique moyenne $E[dW^2]$ traduisant la dispersion, peut être considérée comme inversement proportionnelle à la longueur et

$$\sigma^2(dW) \propto \frac{1}{L}.$$

De même, du fait du moyennage statistique sur W (suffisamment grand), la valeur quadratique moyenne $E[dL^2]$ peut être considérée comme inversement proportionnelle à la largeur et

$$\sigma^2(dL) \propto \frac{1}{W}.$$

Ainsi, pour un composant dont la valeur dépend du produit $P = WL$, avec

$$\frac{\partial P}{P} = \frac{\partial W}{W} + \frac{\partial L}{L}$$

et

$$\frac{\sigma^2(\partial P)}{P^2} = \frac{\sigma^2(\partial W)}{W^2} + \frac{\sigma^2(\partial L)}{L^2}$$

l'erreur relative d'appariement due aux fluctuations périphériques s'écrit donc

$$\sigma\left(\frac{\partial P}{P}\right) \propto \sqrt{\frac{1}{LW^2} + \frac{1}{WL^2}} = \frac{1}{\sqrt{WL}} \sqrt{\frac{1}{L} + \frac{1}{W}}.$$

Pour un composant dont la valeur dépend du rapport $R = W/L$ on obtient la même valeur d'écart type.

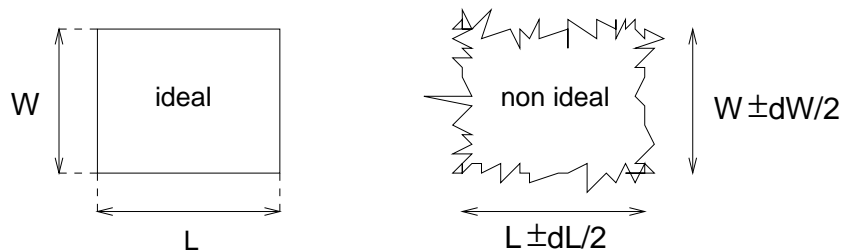


FIGURE 7 –

Modélisation des fluctuations périphériques

- Prise en compte des fluctuations spatiales décorréées

Si maintenant on s'intéresse aux fluctuations spatiales (*figure 8*), du fait du moyennage statistique sur l'aire WL (suffisamment grande), la valeur quadratique moyenne $E[dY^2s]$ peut être considérée comme inversement proportionnelle à la surface et

$$\sigma^2(dYs) \propto \frac{1}{WL}.$$

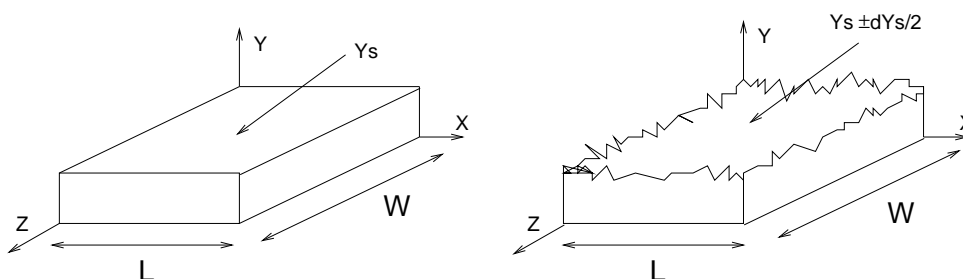


FIGURE 8 –

Modélisation des fluctuations spatiales

- Modélisation de l'erreur d'appariement :

Si les fluctuations spatiales et périphériques sont décorréées, en combinant les deux effets, l'erreur d'appariement pour un paramètre physique \mathcal{P} , entre deux dispositifs identiques séparés par une distance D peut être modélisée par la relation [6]

$$M = \sigma\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\mathcal{P}}\right) = \sqrt{\frac{M_a^2}{LW} + \frac{M_{wl}^2}{LW^2} + \frac{M_{lw}^2}{WL^2} + S_{\mathcal{P}}^2 D^2}.$$

La dépendance statistique caractérisée par le paramètre $S_{\mathcal{P}}$ est introduit pour tenir compte du fait que le paramètre physique en question peut présenter une variation graduelle sur la distance de séparation D . Toutes les constantes présentes dans l'équation sont des paramètres technologiques déterminables expérimentalement. En pratique, pour des raisons de commodité d'extraction et d'optimisation de paramètres, on est conduit à modéliser l'erreur d'appariement à partir de la relation simplifiée

$$M = \sigma\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\mathcal{P}}\right) = \sqrt{\frac{M_a^2}{LW} + \frac{M_w^2}{W^2} + \frac{M_l^2}{L^2}}.$$

Références

- [1] S. INOHIRA, T. SHINMI, M. NAGATA, T. TOYABE, and K. IIDA. "A statistical model including parameter matching for analog integrated circuits simulation". *IEEE Transactions on Electron Devices*, vol. 32(No. 10) :pp. 2177–2183, October 1985.
- [2] M. ISMAIL and T. FIEZ. "*Analog VLSI :signal and information processing*". McGraw-Hill Book Company, 1994.
- [3] J. LEFEBVRE. "*Introduction aux analyses statistiques multidimensionnelles*". Masson, 1983.
- [4] C. MICHAEL, C. ABEL, and M. ISMAIL. "SMOS :a cad compatible statistical model for analog MOS integrated circuit simulation". *INTERNATIONAL Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 20 :pp. 327–348, 1992.
- [5] A. PAPOULIS. "*Probability, random variables and stochastic processes*". McGraw-Hill Book Company, New York, 1965.
- [6] M.J.M. PELGROM, A.C J. DUINMAIJER, and A.P.G. WELBERS. "Matching properties of MOS transistors". *IEEE Journal of Solid-State Circuit*, vol. 24(No. 5) :pp. 1433–1440, Oct. 1989.
- [7] E.A. VITTOZ. "Advanced analog digital design :analog circuit layout". Eurochip course Leuven, 1992.
- [8] P. YANG, D.E. HOCEVAR, P.F. COX, C. MACHALA, and P.K. CHATTERJEE. "An integrated and efficient approach for MOS VLSI statistical circuit design". *IEEE Transactions on Computer-Aided Design*, vol. 5(No. 1) :pp. 5–13, Jan. 1986.