Aspects théoriques du filtrage

Table des matières

1 L'approximation

1.1 Le rôle

En filtrage, le rôle de l'approximation est de traduire les spécification de filtrage, données la plupart du temps en terme de gabarit, sous la forme d'une fonction de transfert réalisable par le dispositif physique choisi pour effectuer la synthèse du filtre.

1.2 La nécessité de l'approximation

1.2.1 Filtres modèles de référence

Les filtres modèles de référence sont des filtres spécifiés dans le domaine fréquentiel ou temporel. Physiquement irréalisables,ils peuvent toutefois être considérés comme des limites pour les filtres réels.

● Filtre idéal dans le domaine fréquentiel

Comme le montre la *figure 1*, c'est un filtre passe-bas caractérisé par une atténuation nulle en bande passante et infinie en bande atténuée. L'inverse de sa fonction de transfert est tel que

$$\mid H(\omega) \mid = 1 \quad si \quad -\omega_c \leq \omega \leq +\omega_c \quad et \quad \mid H(\omega) \mid = 0 \quad ailleurs.$$

Sa phase est une fonction linéaire de la fréquence avec

$$\Theta(\omega) = -\frac{n\,\pi}{2}\,\frac{\omega}{\omega_c}.$$

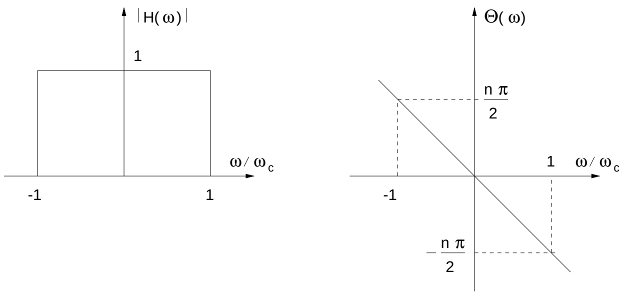

FIGURE 1 –

Module et phase du passe-bas idéal

La fonction $\gamma(\omega)$ étant la fonction échelon, en écrivant

$$H(j\omega) = (\ \gamma(\omega + \omega_c) - \gamma(\omega - \omega_c)\ )e^{\frac{-jn\pi}{2\omega_c}}$$

la réponse impulsionnelle du passe-bas a pour expression

$$h(t) = \frac{\omega_c}{\pi}\,\frac{sin(\omega_c t - \frac{n\pi}{2})}{\omega_c t - \frac{n\pi}{2}}.$$

Elle est anticipatrice puisqu'elle débute à $t = -\infty$, donc irréalisable physiquement (*figure 2*). Son temps de propagation de groupe

$$\tau = -\frac{d\Theta}{d\omega} = \frac{n\pi}{2\omega_c}$$

est constant.

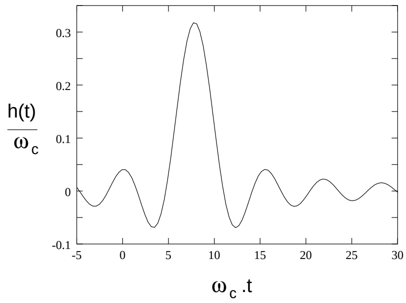

FIGURE 2 –

Réponse impulsionnelle du passe-bas idéal avec n=5

- Filtre idéal dans le domaine temporel

Bien qu'étant idéal en amplitude et en phase, le filtre modèle rectangulaire est caractérisé par une réponse impulsionnelle présentant des oscillations, il ne peut être considéré comme un modèle dans le domaine temporel. Ainsi, on définit le filtre idéal dans le domaine temporel à partir de la fonction de Gauss de la *figure 3*, normalisée pour obtenir $\mid H(\omega_c) \mid = 1/\sqrt{2}$:

$$\mid H(\omega_c) \mid = exp(\frac{Log(2)}{2}\,(\frac{\omega}{\omega_c})^2).$$

Sa réponse impulsionnelle est également une gaussienne et ne présente pas d'oscillation

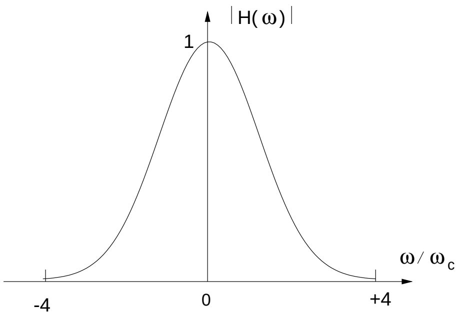

FIGURE 3 –

Réponse en fréquence du passe-bas idéal gaussien

(*figure 4*) puisqu'elle a pour expression formelle

$$h(t) = \frac{\omega_c}{sqrt2\;\pi\;Log(2)}\;exp(-\frac{(\omega_c t - \frac{n\pi}{2})^2}{2Log(2)}).$$

Pour un ordre identique, elle est beaucoup moins anticipatrice que la réponse impulsionnelle du filtre rectangulaire, mais toujours physiquement non réalisable. Son temps de propagation de groupe est également constant avec

$$\tau = \frac{n\,\pi}{2\,\omega_c}$$

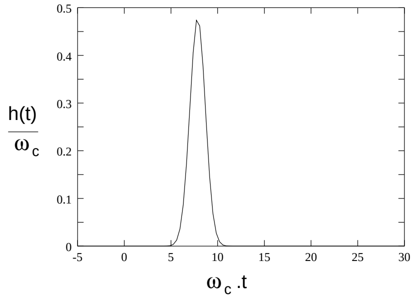

FIGURE 4 –

Réponse impulsionnelle du passe-bas idéal gaussien avec n=5

●Les filtres physiquement réalisables

Les filtres réels passe-bas ne peuvent être que des approximations des filtres modèles de référence. Ainsi, les filtres réels présentent une atténuation $A(\omega)$ en bande passante non nulle que nous poserons inférieure ou égal à une (éventuellement plusieurs) valeur a_{max} et un affaiblissement en bande atténuée différente de l'infini que nous poserons supérieur ou égal à une (éventuellement plusieurs) valeur finie a_{min}. La transition entre bande passante et bande atténuée s'effectue de manière progressive, ce qui donne lieu à une bande de transition. Ainsi, de manière générale la réponse en fréquence d'un passe-bas physiquement réalisable devra s'inscrire dans un gabarit, qui sous sa forme la plus simple, c'est à dire avec une seule valeur a_{max} et une seule valeur a_{min} correspondra au schèma type de la *figure 5*.

Comme nous le verrons par la suite, les filtres passe-haut, passe-bande et coupe-bande peuvent être obtenus par transformation du gabarit passe-bas, ainsi toutes les remarques concernant le passe-bas idéal et physiquement réalisable peuvent être étendues à tous les filtres de fréquences. L'approximation est donc un préalable à la synthèse. Elle permet de traduire les spécifications de filtrage sous la forme d'une fonction de transfert. Ces spécifications sont généralement données en terme de contraintes portant sur le module du signal à traiter. Lorsque des contraintes sont imposées, la plupart du temps en sus, sur la phase, elles sont généralement spécifiées en terme de temps de propagation de groupe, plus facilement manipulable au sens mathématique, puisque s'exprimant sous forme polynomiale et non pas à partir de fonction transcendante.

2 Les différents types d'approximation

Le problème de l'approximation n'est pas un problème spécifique au filtrage, c'est une branche des mathématiques extrémement importante, théoriquement on peut le formuler en disant que si $g_{id}(x)$ est une caractéristique idéale à approximer dans l'intervalle

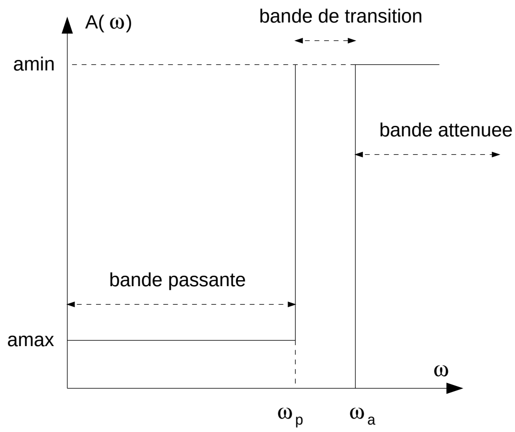

FIGURE 5 –

Gabarit du passe-bas réel

(x_1, x_2) et $g(x, \hat{a})$ une fonction appriximante, approximer $g_{id}(x)$ consiste à ajuster les n paramètres du vecteur $\hat{a}$ pour que la fonction d'erreur $E(x, \hat{a}) = g(x, \hat{a}) - g_{id}(x)$ soit minimale dans l'intervalle considéré. Pour ce faire, il existe tout un arsenal de méthodes.

2.1 L'approximation selon le critère des moindres $p^{iéme}$

A FINIR